Verzamelingen – antwoorden van de opgaven **Wiskunde D vierde klas**

1. Voor de verzameling van alle positieve drievouden hebben we twee notaties gezien:
$\{k \mid k > 0$ en een veelvoud van $3\}$ en $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.
Geef nóg een notatie voor deze verzameling, zonder woorden te gebruiken.

Bijvoorbeeld $\{3k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ of $\{k \mid \frac{k}{3} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

2. Geef drie notaties voor de verzameling der (positieve en negatieve) *even* getallen.

$\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\{k \mid \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}\}$.

3. Wat is het verschil tussen 1 en $\{1\}$?

1 is een *natuurlijk getal*, $\{1\}$ is een *verzameling*; er geldt: $1 \in \{1\}$.

4. Welke van de volgende beweringen zijn waar en welke onwaar?

- $1 \in \varnothing$ onwaar
- $0 \in \varnothing$ onwaar
- $11 \in \{11\}$ waar
- $11 \in \mathbb{N}$ waar
- $11 \subset \mathbb{N}$ onwaar
- $\{11\} \subset \mathbb{N}$ waar
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ onwaar
- $0 \notin \mathbb{Q}$ onwaar
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \supset \mathbb{Z}$ onwaar
- $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ waar
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} \subset [-3, 3]$ waar (bedenk: de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$ is het interval $\langle -2, 2\rangle$).

5. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{1, 2, 3\}$ en $W = \{3, 4, 5\}$. Bepaal $V \cup W$, $V \cap W$ en $V \setminus W$.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$.

6. Bepaal $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ en $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$; $\mathbb{N}$; $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ (deze laatste verzameling kan ook worden genoteerd als $\{-k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$).

7. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \langle \leftarrow, 10]$ en $W = \langle 0, \rightarrow\rangle$. Bepaal $V \cup W$, $V \cap W$ en $V \setminus W$.

$\mathbb{R}$; $\langle 0, 10]$; $\langle \leftarrow, 0]$.

8. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \langle \leftarrow, 10\rangle$ en $W = \{10\}$. Bepaal $V \cup W$, $V \cap W$ en $V \setminus W$.

$\langle \leftarrow, 10]$; $\varnothing$; $\langle \leftarrow, 10\rangle$.

9. De verzameling $\mathbb{R}$ is omvangrijker dan $\mathbb{Q}$. Zo behoort $\sqrt{2}$ wél tot $\mathbb{R}$, maar niet tot $\mathbb{Q}$. Bewijs dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Deze opgave is besproken in de les.

10. Bewijs dat $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

We geven een *bewijs uit het ongerijmde*; dat wil zeggen: we veronderstellen dat de te bewijzen uitspraak *onwaar* is, en leiden vervolgens een *tegenspraak* af.
Veronderstel dat $\sqrt{3}$ wél een breuk is, dan kun je dit getal schrijven als $\frac{a}{b}$, waarbij a en b geen gemeenschappelijke delers hebben (dat wil zeggen: de breuk is zo ver mogelijk vereenvoudigd).

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3} &= \frac{a}{b} \\
a &= b\sqrt{3} \\
a^2 &= 3b^2 \qquad\qquad (\star) \\
&\Rightarrow \; a^2 \text{ is een drievoud} \\
&\Rightarrow \; a \text{ is óók een drievoud } ^1) \\
a &= 3k \text{ voor een zekere } k \in \mathbb{N} \\
a^2 &= 9k^2 \qquad\qquad (\star\star)
\end{aligned}
$$

$(\star)$ en $(\star\star)$ geven:

$$
\begin{aligned}
9k^2 &= 3b^2 \\
b^2 &= 3k^2 \\
&\Rightarrow \; b^2 \text{ is een drievoud} \\
&\Rightarrow \; b \text{ is óók een drievoud}
\end{aligned}
$$

Conclusie: a en b zijn beide drievouden, dus ze hebben minimaal één gemeenschappelijke deler (namelijk 3), dus de breuk $\frac{a}{b}$ was niet vereenvoudigd. Dit is in tegenspraak met de gemaakte veronderstelling dat $\sqrt{3}$ geschreven kan worden als onvereenvoudigbare breuk, met andere woorden: $\sqrt{3}$ is *niet* te schrijven als (onvereenvoudigbare) breuk. Dus $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

[1]) Waarom geldt dat als a^2 een drievoud is, a dat óók is?
Welnu, dit kunnen we wederom *uit het ongerijmde* bewijzen. Dat wil zeggen: gegeven is dat a^2 een drievoud is; veronderstel dat a géén drievoud is. Dan is a te schrijven als $3k+1$ of als $3k+2$, met $k \in \mathbb{Z}$.
In het eerste geval geldt $a^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$: dit is géén drievoud (maar een drievoud plus 1), dus dit is in tegenspraak met het gegeven dat a^2 een drievoud is.
In het tweede geval geldt $a^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$: dit is géén drievoud (maar ook een drievoud plus 1), dus dit is eveneens in tegenspraak met het gegeven dat a^2 een drievoud is.
Conclusie: als a géén drievoud zou zijn, leidt dat tot een tegenspraak, waaruit we kunnen concluderen dat a wél een drievoud moet zijn!