Verzamelingen

Wiskunde D vierde klas

Voor een *getallenverzameling* bestaan verschillende notaties:

- door de elementen van de verzameling *op te sommen* tussen accoladen;
  zo is $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van een worp met een dobbelsteen.
- door een opsomming tussen accoladen te *suggereren*;
  zo is $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de verzameling van alle positieve gehele getallen.
- door een *voorwaarde* te vermelden waaraan de elementen van de verzameling moeten voldoen;
  zo is $\{k \mid k > 0 \text{ en een veelvoud van } 3\}$ de verzameling van alle positieve drievouden;
  bij deze notatie wordt achter de verticale streep de voorwaarde vermeld.
- door middel van een *interval*; zie hieronder.

Welke notatie voor een zekere verzameling wordt gehanteerd, hangt af van de aard van die verzameling. Vaak zijn er meerdere notaties voor één en dezelfde verzameling mogelijk; zo kan de hierboven genoemde verzameling $\{k \mid k > 0 \text{ en een veelvoud van } 3\}$ eveneens als volgt worden genoteerd: $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

Een verzameling die geen enkel element bevat, heet de *lege verzameling*, en wordt genoteerd als $\varnothing$.

Dat het object a een element is van de verzameling V, wordt genoteerd als $a \in V$. De ontkenning hiervan, a is geen element van V, wordt genoteerd als $a \notin V$. Verder zeggen we dat V een *deelverzameling* is van een verzameling W indien elk element van V ook een element van W is, notatie: $V \subset W$, of $W \supset V$.

Sommige verzamelingen komen zo vaak voor, dat er speciale notaties voor zijn:

$\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: de verzameling der *natuurlijke* getallen;
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: de verzameling der *gehele* getallen;
$\mathbb{Q} = \{\frac{t}{n} \mid t, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: de verzameling der *rationale* getallen, ofwel: de verzameling der *breuken*;
$\mathbb{R} = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$: de verzameling der *reële* getallen;
$\mathbb{C}$: de verzameling der *complexe* getallen;
deze getallenverzameling komt aan bod bij wiskunde D in de vijfde klas.

De verzameling $\mathbb{Z}$ wordt hierboven genoteerd door een opsomming te suggereren, maar kan ook als volgt worden genoteerd: $\mathbb{Z} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zoals hierboven opgemerkt, wordt de verzameling van alle reële getallen aangeduid met $\mathbb{R}$. Onder een *interval* verstaan we een verzameling van reële getallen die correspondeert met een aaneengesloten deel van $\mathbb{R}$. We onderscheiden de volgende soorten intervallen (waarbij steeds $a < b$):

- $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (begrensd open interval);
- $\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (begrensd halfopen interval);
- $[a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (begrensd halfopen interval);
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (begrensd gesloten interval);
- $\langle a, \rightarrow \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (onbegrensd open interval);
- $[a, \rightarrow \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (onbegrensd interval);
- $\langle \leftarrow, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (onbegrensd open interval);
- $\langle \leftarrow, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (onbegrensd interval).

De *doorsnede* van twee verzamelingen V en W, notatie $V \cap W$, bestaat uit de *gemeenschappelijke* elementen van V en W. In accolade-notatie: $V \cap W = \{x \mid x \in V \text{ én } x \in W\}$. Indien $V \cap W = \varnothing$, heten V en W *disjunct*.

De *vereniging* van twee verzamelingen V en W, notatie $V \cup W$, bestaat uit de elementen die tot V, tot W of tot beide behoren. In accolade-notatie: $V \cup W = \{x \mid x \in V \text{ of } x \in W\}$.

Het *verschil* van twee verzamelingen V en W, notatie $V \setminus W$, bestaat uit de elementen die wel tot V, maar niet tot W behoren. In accolade-notatie: $V \setminus W = \{x \mid x \in V \text{ én } x \notin W\}$.

Opgaven

1. Voor de verzameling van alle positieve drievouden hebben we twee notaties gezien:
$\{k \mid k > 0 \text{ en een veelvoud van } 3\}$ en $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.
Geef nóg een notatie voor deze verzameling, zonder woorden te gebruiken.

2. Geef drie notaties voor de verzameling der (positieve en negatieve) *even* getallen.

3. Wat is het verschil tussen 1 en $\{1\}$?

4. Welke van de volgende beweringen zijn waar en welke onwaar?

- $1 \in \varnothing$
- $0 \in \varnothing$
- $11 \in \{11\}$
- $11 \in \mathbb{N}$
- $11 \subset \mathbb{N}$
- $\{11\} \subset \mathbb{N}$
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$
- $0 \notin \mathbb{Q}$
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \supset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} \subset [-3, 3]$

5. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{1, 2, 3\}$ en $W = \{3, 4, 5\}$. Bepaal $V \cup W$, $V \cap W$ en $V \setminus W$.

6. Bepaal $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ en $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

7. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \langle \leftarrow, 10]$ en $W = \langle 0, \rightarrow \rangle$. Bepaal $V \cup W$, $V \cap W$ en $V \setminus W$.

8. Gegeven zijn de verzamelingen $V = \langle \leftarrow, 10 \rangle$ en $W = \{10\}$. Bepaal $V \cup W$, $V \cap W$ en $V \setminus W$.

9. De verzameling $\mathbb{R}$ is omvangrijker dan $\mathbb{Q}$. Zo behoort $\sqrt{2}$ wél tot $\mathbb{R}$, maar niet tot $\mathbb{Q}$. Bewijs dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

10. Bewijs dat $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.