TOPOLOGIE deeltentamen 2

Vrije Universiteit
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Afdeling Wiskunde
De Boelelaan 1081a, Amsterdam

Elke goedgemaakte opgave levert één punt op. 'Goedgemaakt' wil zeggen: correct, volledig beargumenteerd en netjes opgeschreven. Inleveren uiterlijk op 15 januari 2011, per e-mail naar `dijkstra@cs.vu.nl` in `pdf` of `jpg` formaat. Samenwerken mag; lever dan per team één stel oplossingen in. Bestudeer voor het mondeling tentamen §8.5 en §8.6 in Croom (met opgaven 8.5:3–7 en 8.6:4–6,10). Maak uiterlijk met het inleveren van dit tentamen een afspraak voor het mondeling in week 5 of 6 van 2011.

---

1. Als A een deelverzameling is van een ruimte X dan is een *retractie* van X op A een continue afbeelding $r : X \to A$ zodat $r(a) = a$ voor elke $a \in A$. Bewijs de volgende uitspraken.

   a. Elke retractie is een quotiëntafbeelding.

   b. Als X een Hausdorffruimte is en r een retractie is van X op A dan is A gesloten in X.

   c. Als $f\colon X \times Y \to X$ de projectiefunctie is dan is f een quotiëntafbeelding.

   d. Als $f\colon X \times Y \to X$ de projectiefunctie is en Y is compact dan is f gesloten.

2. Laat $f : X \to Y$ een gesloten continue surjectie zijn. Bepaal of de volgende twee uitspraken juist zijn en geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   a. Als X normaal is dan is ook Y normaal.

   b. Als X Hausdorff is dan is ook Y Hausdorff.

   Neem nu bovendien aan dat voor elke $y \in Y$ de vezel $f^{-1}(y)$ compact is.

   c. Bewijs dat als X Hausdorff is dan is ook Y Hausdorff.

   d. Bewijs dat als Y compact is dan is ook X compact.

3. Zij $\mathbb{R}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$, de verzameling bestaande uit alle rijen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ van reële getallen. Zij $\mathcal{B}$ de collectie van alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^\infty$ van de vorm $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$, waarbij elke U_n een open deelverzameling van $\mathbb{R}$ is (in de gewone topologie).

   a. Toon aan dat $\mathcal{B}$ als basis voor een topologie kan dienen; de *doostopologie*.

   In de volgende onderdelen is $\mathbb{R}^\infty$ voorzien van de doostopologie.

   b. Laat $\mathcal{N}$ de verzameling van nulrijen zijn, dwz. de rijen die naar nul convergeren. Laat zien dat $\mathcal{N}$ een losse deelverzameling is van $\mathbb{R}^\infty$ (dus $\mathbb{R}^\infty$ is splitsbaar).

   c. Bewijs dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\infty$, gedefinieerd door $f : x \mapsto (x, x, x, \ldots)$, niet continu is.

   d. Toon aan dat $\mathbb{R}^\infty$ niet eerste aftelbaar is.

EINDE