datastructuren en algoritmen
2011 09 12
college 3

datastructuren totnutoe

- lineaire datastructuren
  stacks, queues, vectoren, lijsten, rijtjes

- hierarchische datastructuren
  bomen, traversals

schema

- recap
- sorteren
- heaps
- materiaal

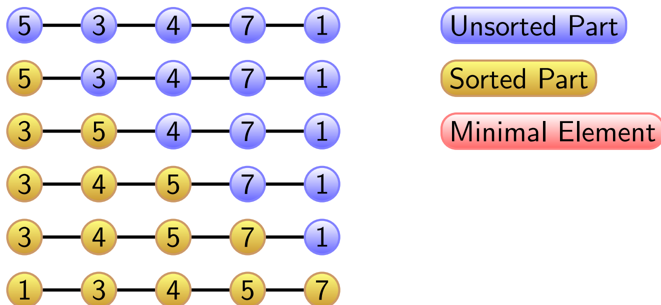
schema

- recap
- sorteren
- heaps
- materiaal

sorteren: voorbeeld insertion sort

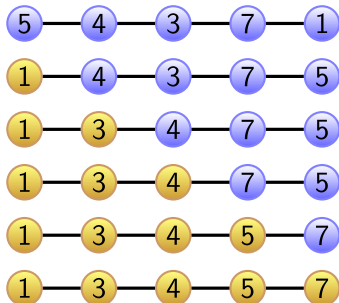
- het rijtje bestaat uit een gesorteerd deel
  en een niet-gesorteerd deel

- neem het eerste item uit het niet-gesorteerde deel
  en voeg het op de juiste plek toe aan het gesorteerde deel



sorteren: voorbeeld selection sort

- zoek een kleinste key in het rijtje
  en verwissel dat item met het eerste item
- itereer op de rest van het rijtje



Unsorted Part

Sorted Part

Minimal Element

sorteren: specificatie

- input:
  een eindig rijtje getallen
- output:
  een geordende permutatie van de input

wat sorteren we?

we sorteren alleen getallen, maar:

- zo'n getal is de key van een groter item

  een item bestaat uit een key en element

- (we maken ons niet druk over bijv de vraag of we hele grote items moeten verplaatsen)

wat is gesorteerd?

definitie:
een ordening is een binaire relatie $\leq$ zo dat

- $n \leq n$
  reflexiviteit
- als $m \leq n$ en $n \leq p$ dan $m \leq p$
  transitiviteit
- als $m \leq n$ en $n \leq m$ dan $m = n$
  anti-symmetrie

een ordening is totaal als elk tweetal elementen vergelijkbaar is

voorbeeld & meestal gebruikt: natuurlijke getalen met $\leq$

hoe sorteren we?

- er zijn veel sorteeralgoritmes

  (we gaan ook heel vaak sorteren!)

- veel hebben als basis vergelijken van keys:
  comparison sort

eigenschappen van sorteeralgoritmes

- de worst-case tijdscomplexiteit
  in termen van grote-Oh
- in place
  ruimtegebruik in $\mathcal{O}(1)$: dat voor de data
  plus eventueel een constante hoeveelheid extra ruimte
- stabiel
  de volgorde van items met dezelfde key blijft behouden

sorteren: conventies

- we gaan uit van een totale ordening op de keys
- meestal zijn we alleen geïnteresseerd in de keys
  (en niet zozeer in de elementen)
- een key kan meer dan eens voorkomen
- we bestuderen verschillende sorteeralgoritmes

heaps

een data-structuur die gebruikt wordt voor sorteren
maar ook voor andere toepassingen

heap: definitie

- een complete binaire boom
- keys op de interne knopen
- externe knopen zijn leeg
- met de (min- of max-)heap eigenschap

complete binaire boom: definitie

- de lagen $0, 1, \ldots, \mathit{hoogte} - 2$ zijn helemaal vol met interne knopen dus 2^i interne knopen in zo'n laag i

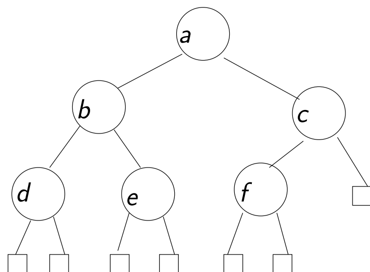
- de laag $\mathit{hoogte} - 1$ is vanaf links vol met interne knopen, dan leeg

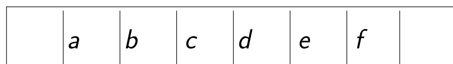
heap als vector

met de level-numbering

werkt mooi voor complete binaire bomen!

heap met n items als array met lengte $m \geq n$





toegang tot keys in de heap

vanuit de boom gezien geven de we array-index:

- v is wortel dan $p(v) = 1$
- v linker-kind van u dan $p(v) = 2p(u)$
- v rechter-kind van u dan $p(v) = 2p(u) + 1$

vanuit het array gezien geven we ouder of kind:

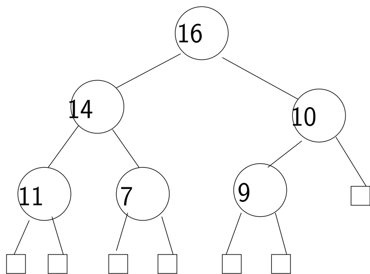
- $\text{parent}(i) = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$
- $\text{leftChild}(i) = 2i$
- $\text{rightChild}(i) = 2i + 1$

heap-eigenschap: definities

- voor de min-heap:
  als boom: key van ouder kleiner-gelijk key van kind
  als array: $H[\text{parent}(i)] \leq H[i]$
  naar beneden worden de keys niet echt kleiner
  minimum key op de wortel

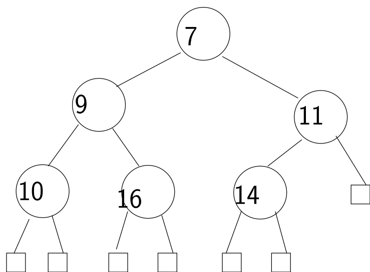
- voor de max-heap:
  als boom: key van ouder groter-gelijk key van kind
  als array: $H[\text{parent}(i)] \geq H[i]$
  naar beneden worden de keys niet echt groter
  maximum key op de wortel

max-heap: voorbeeld



	16	14	10	11	7	9	

min-heap: voorbeeld



	7	9	11	10	16	14	

heap: eigenschap

de hoogte van een heap met n interne knopen is $\lceil \log(n+1) \rceil$

dus in $\Theta(\log(n))$

bubbel in heaps

- we hebben een knoop met links en rechts een al een heap
  herstel heap-eigenschap door down-heap bubbel

- we hebben een heap en voegen een item toe
  herstel heap-eigenschap door up-heap bubbel

down-heap bubbel

- voor max-heap of voor min-heap
- heap gezien als boom of als array
- gebruikt bij verwijderen en bij sorteren

down-heap bubbel voor de min-heap

downMinHeap(H, i) met input i een knoop in H
links en rechts van i is het al een min-heap

- bekijk i, zijn linker-kind l en zijn rechter-kind r
- bepaal de kleinste van i, l, r
- als kleinste is i dan klaar
- als kleinste is l: verwissel i en l, doe downMinHeap(H, i)
- als kleinste is r; verwissel i en r, doe downMinHeap(H, i)

up-heap bubbel

- voor max-heap of voor min-heap
- heap gezien als boom of als array
- gebruikt bij toevoegen

up-heap bubbel voor de min-heap

upMinHeap(H, i) met input i een knoop in H
i verstoort mogelijk de heap-eigenschap

- bekijk i en zijn ouder p
- als i kleiner: verwissel i en p, doe upMinHeap(H, i)
- als i groter: klaar

tijdscomplexiteit bubbel

voor down-heap bubbel en up-heap bubbel geldt:
tijdscomplexiteit in $\mathcal{O}(\mathit{hoogte})$ dus in $\mathcal{O}(\log(n))$

heap: verwijder de wortel

- bewaar wortel; zet laatste op plek wortel
  in array: verwissel $H[1]$ met $H[laatste]$; dan $laatste := laatste - 1$

- zorg dat het weer een heap wordt met downMinHeap of downMaxHeap

- worst-case tijdscomplexiteit: $\mathcal{O}(\log(n))$ (waarom?)

heap: toevoegen

input: een heap H en een item met key k

- plaats item op plek *laatste*; hoog *laatste* een op
- zorg dat het weer een heap wordt met upMinHeap of upMaxHeap

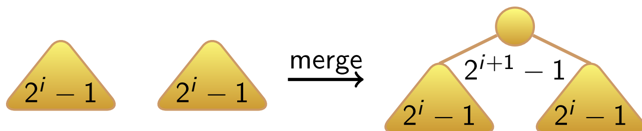
hoe maken we een heap van n items?

- voeg één voor één een item toe
  per stap in $\mathcal{O}(\log(n))$ dus totaal in $\mathcal{O}(n \log n)$

- voor $n = 2^h - 1$ voor zekere h: bottom-up heap construction
  in $\mathcal{O}(n)$

bottom-up heap construction

- maak van alle $2^h - 1$ elementen een heap ter grootte 1
- voor stap $1, \ldots, \log n$:
  merge heaps ter grootte $2^i - 1$ tot heap ter grootte $2^{i+1} - 1$



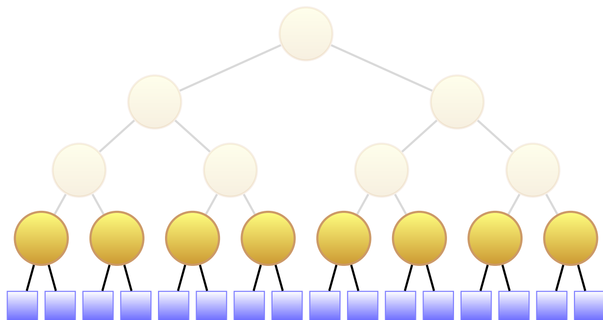
merging twee heaps

- plak item met key k boven twee heaps
- doe zonodig down-heap bubbel om weer een heap te maken

bottom-up heap constructie: voorbeeld

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

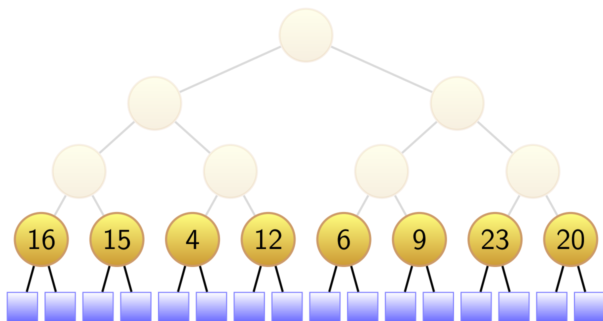
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap constructie: voorbeeld

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

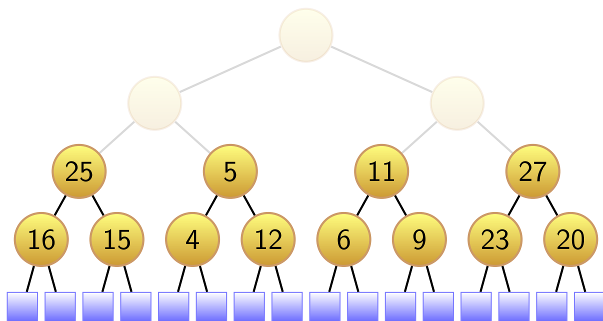
16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

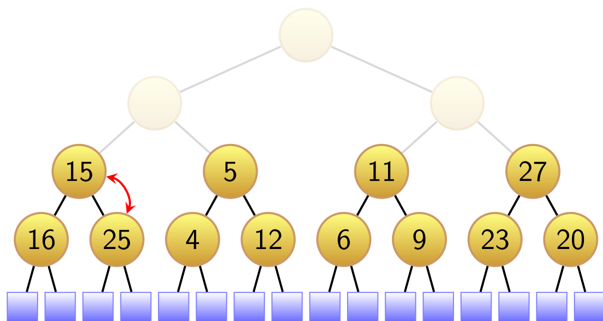
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

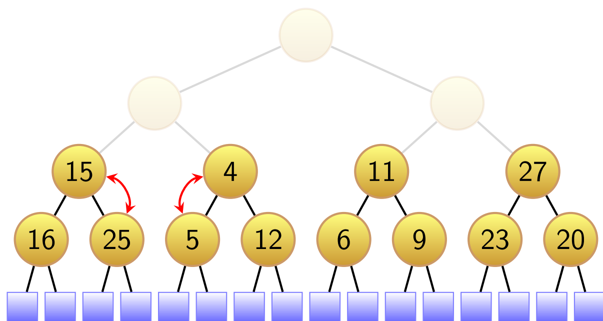
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

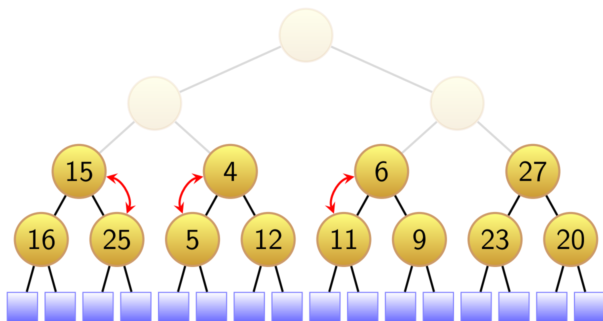
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

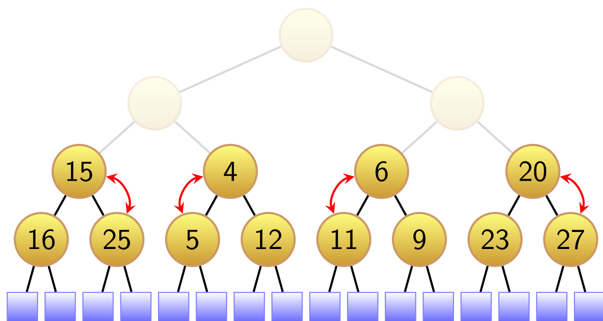
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

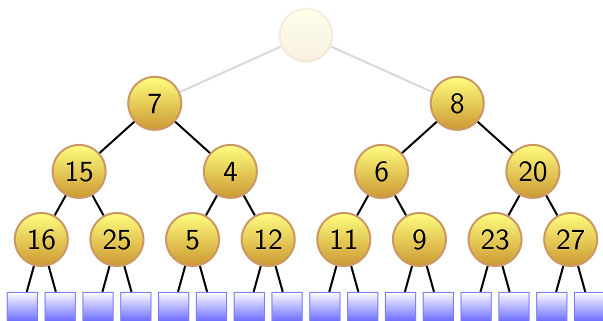
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

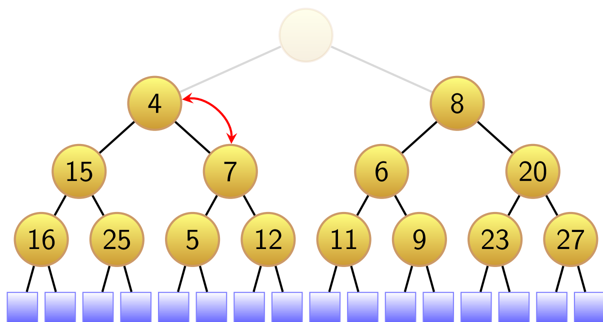
16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

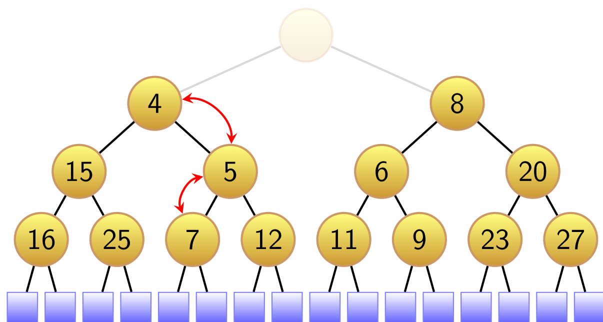
16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10



bottom-up heap construction

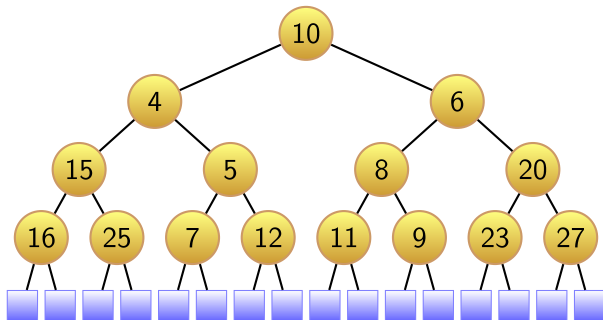
We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$

bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

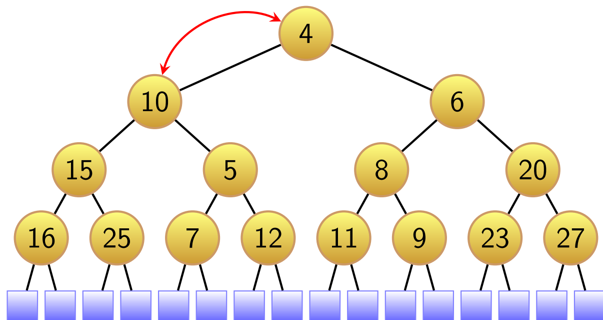
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

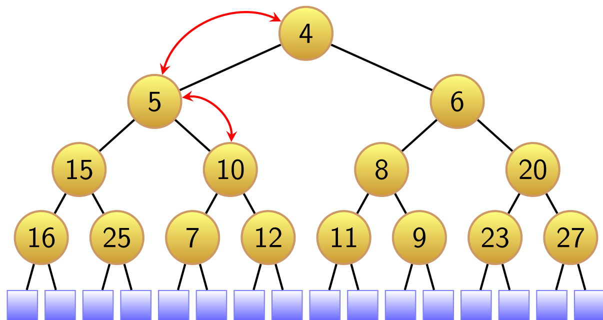
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

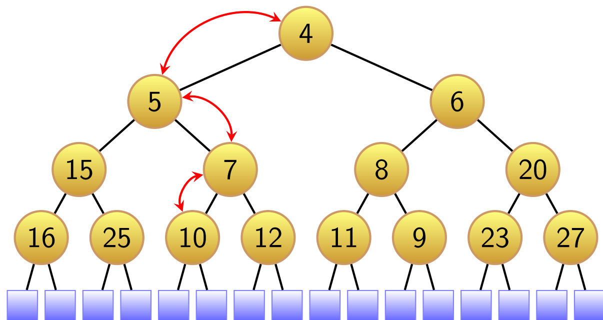
$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap construction

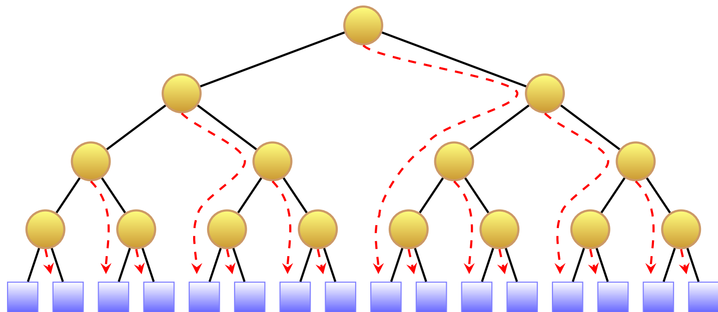
We bouwen een heap van de volgende $2^4 - 1 = 15$ elementen:

$$16, 15, 4, 12, 6, 9, 23, 20, 25, 5, 11, 27, 7, 8, 10$$



bottom-up heap constructie: complexiteit

- we gaan ten hoogste een keer door een kant heen
- er zijn $2n$ kanten
- totaal dus in $\mathcal{O}(n)$ dus beter dan in $\mathcal{O}(n \log n)$



sorteren: heap-sort

we bekijken de max-heap gerepresenteerd als volle vector

Algorithm heapsort(H):
  buildMaxHeap(H)
  for $i = H.length$ **downto** 2 **do**
    exchange $H[1]$ met $H[i]$
    $H.size := H.size - 1$
    downHeap((H, 1))

heap-sort: eigenschappen

- worst-case tijdscomplexiteit in $\mathcal{O}(n \log(n))$
- in place

schema

- recap
- sorteren
- heaps
  - bubbel
  - verwijderen en toevoegen
  - bouwen van een heap
  - sorteren met een heap
- materiaal

materiaal

- boek 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4

extra materiaal

- Fibonacci heap