

**uitwerkingen opgaven formele structuren 2007 - 2008 week 2:
deductie**

Opgave 1.

Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

b

en drie afleidingsregels:

$$\frac{x}{ax} \text{ (R1)} \quad \frac{x}{xb} \text{ (R2)} \quad \frac{x \quad y}{xy} \text{ (R3)}$$

(a) Een afleiding van de string $bbabb$:

- | | | |
|-----|---------|---|
| (1) | b | (axioma) |
| (2) | bb | (uit 1 met R2) |
| (3) | abb | (uit 2 met R1) |
| (4) | $bbabb$ | (uit 2,3 met R3 met $x = bb$ en $y = abb$) |

(b) De string $bbaba$ is niet afleidbaar. We definiëren de stringeigenschap I : “de string eindigt op een b ”. We laten zien dat I een invariant is.

Het axioma b voldoet aan I .

Stel de string x voldoet aan I , dat wil zeggen, x eindigt op een b . Dan geldt ook dat ax eindigt op b . Dus I blijft behouden onder toepassen van R1.

De conclusie van R2 eindigt op b . Dus I blijft behouden onder toepassen van R2.

Stel x en y voldoen aan I . Omdat y op een b eindigt geldt ook dat xy op een b eindigt. Dus I blijft behouden onder toepassen van R3.

We concluderen dat I een invariant is. De string $bbaba$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

(c) Het systeem is beslisbaar want uit de invariant van (b) volgt dat de lege string niet afleidbaar is, en dus zijn alle regels verlengend. Verder zijn er maar eindig veel (namelijk één) axioma's.

Opgave 2.

Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

ab

en volgende twee afleidingsregels:

$$\frac{axb}{bxa} \text{ (R1)} \quad \frac{x \quad y}{xay} \text{ (R2)}$$

(a) Een afleiding van de string $bbaaa$:

- (1) ab (axioma)
- (2) $abaab$ (uit 1 met R2)
- (3) $bbaaa$ (uit 2 met R1)

(b) De string $aaabb$ is niet afleidbaar.

We definiëren de stringeigenschap I : “de string eindigt op aa , ba , of ab ”.

Het axioma ab voldoet aan I .

Stel de string axb voldoet aan I . Dan eindigt x op a . Dus eindigt bx op aa , en voldoet daarmee aan I .

Stel x en y voldoen aan I . Dan eindigt y op aa , ba , of ab . Dus eindigt xay ook op aa , ba , of ab , en voldoet daarmee aan I .

Dus I is een invariant. De string $aaabb$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.