

opgaven formele structuren ‘deductie’

Opgave 2.5.1 uit het dictaat.

Uitwerking:

1. Een afleiding van de string $aacbaa$:

- (1) cab (axioma)
- (2) $caab$ (uit (1) met R1)
- (3) $caaaab$ (uit (2) met R1)
- (4) $acaaab$ (uit (3) met R2)
- (5) $aacaab$ (uit (4) met R2)
- (6) $aacaba$ (uit (5) met R3)
- (7) $aacbaa$ (uit (6) met R3)

2. De stringeigenschap I de string bevat één c en één b en de c komt vóór de b is een *invariant* want deze eigenschap geldt voor het axioma en blijft behouden onder toepassing van de regels:

- I geldt voor het axioma cab .
- Stel dat I geldt voor de premisse $xcybz$ van $R1$. Dan geldt I ook voor de conclusie $xcyybz$ want dan bevat y alleen a 's, en de volgorde van de c en b verandert niet.
- Stel dat I geldt voor de premisse $xca y$ van $R2$. Dan geldt I ook voor de conclusie $xacy$ want de b moet dan in de substring y voorkomen en blijft dus na de c komen. Het aantal b 's en c 's verandert niet.
- Stel dat I geldt voor de premisse $xaby$ van $R3$. Dan geldt i ook voor de conclusie $xbay$ van $R3$ want de c moet dan in de substring x voorkomen en staat dus nog steeds voor de b . Het aantal b 's en c 's verandert niet.

De string $aabcaa$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

Opgave 2.5.2 uit het dictaat.

Uitwerking:

1. Een afleiding voor de string $\square\square\square\diamond$:

1. $\diamond\square$ (axioma)
2. $\square\diamond$ (uit 1 met R3)
3. $\square\diamond\square$ (uit 2 met R1)
4. $\square\diamond\square\square$ (uit 3 met R1)
5. $\square\square\diamond\square$ (uit 4 met R3)
6. $\square\square\square\diamond$ (uit 5 met R3)

2. We definiëren de volgende stringeigenschap I : de string bevat één \diamond . We laten zien dat I een invariant is.

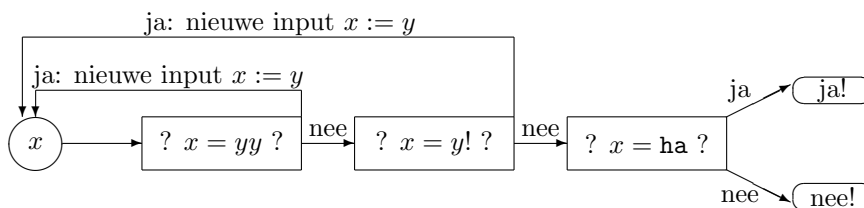
- I geldt voor het axioma.
- I blijft behouden onder toepassen van R1: er komt een \square bij maar de rest van de symbolen blijft gelijk.
- I blijft behouden onder toepassen van R2: alleen de volgorde van de symbolen verandert.
- I blijft behouden onder toepassen van R3: alleen de volgorde van de symbolen verandert.
- I geldt niet voor de string $\diamond\diamond\diamond\square$.

Conclusie: $\diamond\diamond\diamond\square$ is niet afleidbaar.

Opgave 2.5.4 uit het dictaat.

Uitwerking: Het lachstelsel is beslisbaar want het heeft eindig veel axioma's, namelijk één, en alle regels zijn verlengend.

Een plaatje van een algoritme dat de vraag *is de string x afleidbaar?* beantwoordt:



Opgave 1. Gegeven is een formeel systeem als volgt:

alfabet $\{a, c\}$

axioma cac

	regel 1	regel 2
regels	$\frac{x \quad y}{cxyc}$	$\frac{xccy}{xcy}$

- Geef alle strings die je in hoogstens 3 stappen kunt afleiden.
(NB: We tellen het opschrijven van het axioma al als 1 stap, dus van daaruit nog maar 2 stappen!)
- Waarom kan de string $caac$ niet afgeleid worden in dit formele systeem?

Uitwerking van opgave 1:

- (a) In hoogstens één stap kunnen we alleen het axioma

cac

afleiden. In hoogstens twee stappen kunnen we daarbij de string

ccaccacc

afleiden. In hoogstens drie stappen kunnen we daarbij ook nog strings

ccaccaccacccc,
cccaccaccacc,
cccaccaccaccacccc,
caccacc,
ccacacc,
ccaccac

afleiden.

(Je mag het antwoord in boomvorm geven.)

- (b) We definiëren de volgende stringeigenschap I : een a komt altijd voor in een substring van de vorm cac , dus tussen twee c 's in.

De eigenschap I geldt duidelijk voor het axioma cac .

I blijft behouden onder toepassen van regel 1: als voor zowel de string x als de string y geldt dat de invariant geldt, dan geldt voor de string $cxyc$ dat elke a tussen twee c 's in staat.

I blijft ook behouden onder toepassen van regel 2: elke a blijft voorkomen in een sub-string van de vorm cac , ook als ergens een dubbele c in een enkele c veranderd wordt.

We concluderen dat I een invariant is. Verder geldt I niet voor de string $caac$. Die string is dus niet afleidbaar.

Opgave 2. (uit tentamen 30 mei 2000)

We beschouwen het volgende formele systeem. De taal bestaat uit alle strings over het alfabet $\{\square, \diamond, \triangle\}$. Het enige axioma is de string

$\triangle\square\diamond$

en de regels zijn als volgt:

R1 als $x\triangle y\diamond z$ afleidbaar is, dan ook $x\triangle yy\diamond z$,

R2 als $x\triangle\square y$ afleidbaar is, dan ook $x\square\triangle y$,

R3 als $x\square\diamond y$ afleidbaar is, dan ook $x\diamond\square y$.

(Hierbij staan x , y en z als gebruikelijk voor willekeurige strings. Vergeet niet dat de regels ook mogen worden toegepast als we x en/of y en/of z instantiëren met de lege string!)

- (a) Geef een afleiding voor de string $\square\square\triangle\Diamond\square\square$.
- (b) Bewijs dat de string $\square\square\Diamond\triangle\square\square$ niet afleidbaar is in dit formele systeem.

Uitwerking van opgave 2:

- (a) Een afleiding van de string $\square\square\triangle\Diamond\square\square$:
1. $\triangle\square\Diamond$ (axioma)
 2. $\triangle\square\square\Diamond$ (uit 1 met R1)
 3. $\triangle\square\square\square\Diamond$ (uit 2 met R1)
 4. $\square\triangle\square\square\Diamond$ (uit 3 met R2)
 5. $\square\square\triangle\square\Diamond$ (uit 4 met R2)
 6. $\square\square\triangle\square\Diamond\square$ (uit 5 met R3)
 7. $\square\square\triangle\Diamond\square\square$ (uit 6 met R3)
- (b) Definieer de volgende stringeigenschap I : de string bevat één \triangle en de string bevat één \Diamond en de \triangle komt vóór de \Diamond .
- I geldt duidelijk voor het axioma $\triangle\square\Diamond$.
 - I blijft behouden onder toepassen van regel R1: als I geldt voor de string $x\triangle y\Diamond z$ dan bestaat y alleen uit nul, een of meer keer \square . Dan geldt de invariant ook voor de string $x\triangle yy\Diamond z$.
 - I blijft behouden onder toepassen van regel R2: alleen \triangle en \square wisselen van plaats,
 - I blijft behouden onder toepassen van regel R3: alleen de \square en de \Diamond wisselen van plaats.

Verder geldt de invariant *niet* voor de string $\square\square\Diamond\triangle\square\square$ want daar komt de \triangle na de \Diamond .

Conclusie: de string $\square\square\Diamond\triangle\square\square$ is niet afleidbaar.

Opgave 3. (uit hertentamen 17 augustus 2000)

We beschouwen het volgende formele systeem. De taal bestaat uit alle strings over het alfabet $\{a, b, c\}$. Het enige axioma is de string

cba

en de regels zijn als volgt:

R1 als $xbay$ afleidbaar is, dan ook $xaaby$,

R2 als $xca y$ afleidbaar is, dan ook $xaacy$,

R3 als $xcby$ afleidbaar is, dan ook $xbbc y$.

(Hierbij staan x , y en z als gebruikelijk voor willekeurige strings. Vergeet niet dat de regels ook mogen worden toegepast als we x en/of y en/of z instantiëren met de lege string!)

- (a) Geef een afleiding voor de string **aabaaabc**.
- (b) Bewijs dat de string **aacbab** niet afleidbaar is in dit formele systeem.
- (c) Is dit formele systeem beslisbaar? Waarom (niet)?

Uitwerking van opgave 3:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| | 1. cba (axioma) |
| | 2. bbca (uit 1 met R3) |
| | 3. bbaac (uit 2 met R2) |
| (a) Een afleiding voor de string aabaaabc : | 4. baabac (uit 3 met R1) |
| | 5. aababac (uit 4 met R1) |
| | 6. aabaaabc (uit 5 met R5) |
- (b) Definieer de stringeigenschap *I*: de string bevat één *c*, en er staat ten hoogste één *b* rechts van de *c*. We laten zien dat *I* een invariant is.
 - *I* geldt voor het axioma.
 - *I* blijft behouden onder toepassen van R1: er gebeurt niets met de *b*'s en *c*'s.
 - *I* blijft behouden onder toepassen van R2: het aantal *c*'s verandert niet, en de positie van de *b*'s ten opzichte van de *c* ook niet.
 - *I* blijft behouden onder toepassen van R3: het aantal *c*'s verandert niet, en na toepassen van R3 staat er geen *b* meer rechts van de *c*.
 - *I* geldt niet voor de string **aacbab**.

Conclusie: de string **aacbab** is niet afleidbaar.

- (c) Ja, want er is maar een axioma en alle regels zijn verlengend.

Opgave 4. (uit tentamen 30 maart 2001)

Gegeven is een deductief systeem met één axioma, namelijk

$$aa$$

en twee regels, namelijk

$$\frac{xa}{xx}$$

en

$$\frac{x}{xb}$$

- (a) Geef alle afleidingen met maximaal vier stappen.
- (b) Is de string **aaaabbbb** afleidbaar?

- (c) Is dit systeem beslisbaar? Motiveer uw antwoord.

Uitwerking van opgave 4:

- (a) Het handigste is het antwoord in boomvorm te geven. De afleidingen van vier stappen:

1. aa (axioma)
2. aa (uit 1 met de eerste regel)
3. aa (uit 2 met de eerste regel)
4. aa (uit 3 met de eerste regel)

en

1. aa (axioma)
2. aa (uit 1 met de eerste regel)
3. aa (uit 2 met de eerste regel)
4. aab (uit 3 met de tweede regel)

en

1. aa (axioma)
2. aa (uit 1 met de eerste regel)
3. aab (uit 2 met de tweede regel)
4. $aabb$ (uit 3 met de tweede regel)

en

1. aa (axioma)
2. aab (uit 1 met de tweede regel)
3. $aabb$ (uit 2 met de tweede regel)
4. $aabbb$ (uit 3 met de tweede regel)

en beginstukjes van de afleidingen.

- (b) Nee de string $aaaabbbb$ is niet afleidbaar. We definiëren de stringeigenschap I : de string bevat twee a 's. We laten zien dat I een invariant is.

- I geldt voor het axioma aa .
- Stel dat I geldt voor de premisse xa van de eerste regel. Dat betekent dat de substring x precies één a bevat. Dan bevat de conclusie xx dus twee a 's.
- Stel dat I geldt voor de premisse x van de tweede regel. Dat betekent dat de string x precies twee a 's bevat. Dat geldt dan ook voor de string xb .

Alle afleidbare strings voldoen dus aan I . De string $aaaabbbb$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

- (c) Ja het systeem is beslisbaar. De eerste regel is alleen van toepassing op het axioma en levert geen nieuwe afleidbare strings. Het systeem alleen bestaande uit het axioma en de tweede regel levert dus precies dezelfde verzameling van afleidbare strings. Dat systeem is beslisbaar want er is één axioma en de enige regel is verlengend.

Je kunt ook laten zien: de afleidbare strings zijn precies de strings van de vorm ab^n met $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 5. (uit hertentamen 17 augustus 2001)

Gegeven is een deductief systeem D met één axioma, namelijk

$$111$$

en twee regels, namelijk

$$\frac{x}{xx}$$

en

$$\frac{xxx}{x}$$

- (a) Geef alle strings die met maximaal 3 stappen kunnen worden afgeleid. (Het axioma geldt al als één stap.)
- (b) Is de string 11111 (vijf 1-en) afleidbaar? Motiveer uw antwoord.
- (c) Geef een alternatief deductief systeem D' met twee axioma's en één regel dat precies dezelfde strings afleidt.
- (d) Is het systeem D beslisbaar? Motiveer uw antwoord.

Uitwerking van opgave 5:

- (a) Het handste is het antwoord in boomvorm te geven. De strings die in maximaal drie stappen af te leiden zijn: 111, 111111, 111111111111, 11, 1.
- (b) De definiëren de stringeigenschap I : de string bestaat of uit 2^n keer een 1 (voor een $n \in \mathbb{N}$) of uit 3×2^n keer een 1 (voor een $n \in \mathbb{N}$). We laten zien dat I een invariant is.
 - Het axioma 111 voldoet aan I want het is van de vorm 3×2^0 keer een 1.
 - Stel dat de premisse x van de eerste regel aan I voldoet. Als x van de vorm 2^n keer een 1 is, dan is de conclusie xx van de vorm 2×2^n keer een 1. Dus xx voldoet ook aan I . Als x van de vorm 3×2^n keer een 1 is, dan is de conclusie xx van de vorm $3 \times 2 \times 2^n$. Dus ook in dat geval voldoet xx aan I .
 - Stel dat de premisse xxx van de tweede regel aan I voldoet. Dan is xxx van de vorm 3×2^n (want 2^n is niet deelbaar door 3). Dan geldt dat de conclusie x van de vorm 2^n keer een 1 is. Dus de conclusie voldoet ook aan I .

Dus I is een invariant. Omdat de string 11111 niet aan I voldoet is 11111 niet afleidbaar.

- (c) Een alternatief systeem D' bestaat uit de axioma's 1 en 111 en alleen de eerste regel van D .

- (d) Het systeem D is beslisbaar, want het heeft precies dezelfde afleidbare strings als D' , en D' is beslisbaar omdat het eindig veel (namelijk twee) axioma's heeft en alleen verlengende regels.

Opgave 6. (uit tentamen 5 juni 2002)

Gegeven is een deductief systeem over het alfabet $\{a, b\}$ met één axioma:

bab

en drie afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{xay}{xy}$$

$$(R2) \quad \frac{x}{xx}$$

$$(R3) \quad \frac{xby}{xy}$$

- (a) Is de lege string afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding, zo nee, bewijs waarom niet.
- (b) Geef een afleiding van de string $bbbbbb$.
- (c) Bewijs dat de string $bbbbbb$ niet afleidbaar is.

Uitwerking van opgave 6:

- (a) Ja de lege string is afleidbaar. Een afleiding is:
1. bab (axioma)
 2. bb (met R1 uit 1)
 3. λ (met R3 uit 2)
- (b) Een afleiding van $bbbbbb$:
1. bab (axioma)
 2. bb (met R1 uit 1)
 3. $bbbb$ (met R2 uit 2)
 4. $bbbbbbbb$ (met R2 uit 3)
 5. $bbbbbb$ (met R3 uit 4)
- (c) We definiëren de volgende stringeigenschap I : het aantal b 's is even. We laten zien dat I een invariant is:
- I geldt voor het axioma want dat bevat twee b 's.
 - I blijft behouden onder toepassen van R1: als de string xay een even aantal b 's bevat, dan geldt dat ook voor de string xy , want het aantal b 's verandert niet.

- I blijft behouden onder toepassen van R2: als de string x een even aantal b 's bevat, dan geldt dat ook voor de string xx , want die bevat het twee keer zoveel b 's.
- I blijft behouden onder toepassen van R3: als de string $xbbby$ een even aantal b 's bevat dan geldt dat ook voor de string xy want die bevat twee b 's minder (dat is nog steeds een tweevoud).

Dus I is een invariant. De string $bbbb$ voldoet niet aan de eigenschap I en is dus niet afleidbaar.

Opgave 7. (uit hertentamen 16 augustus 2002)

- (a) Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

$$0$$

en één afleidingsregel:

$$\frac{x \quad y}{x1y}$$

Laat zien dat voor elke $n \geq 0$ de string $0(10)^n$ afleidbaar is.

- (b) Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

$$00$$

en drie afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x0}{xx}$$

$$(R2) \quad \frac{x \quad y}{xy}$$

$$(R3) \quad \frac{x00y}{x1y}$$

Geef een afleiding van de string 1 in precies vier stappen. (Het gebruiken van het axioma is één stap.)

- (c) Deze opgave gaat ook over het deductief systeem van opgave 2b.
Is de string 000 afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding, zo nee, bewijs waarom niet.

Uitwerking van opgave 7:

- (a) We bewijzen met inductie naar n dat elke string van de vorm $0(10)^n$ afleidbaar is.

- Het basisgeval: $n = 0$.
De string 0 is afleidbaar want dat is het axioma.
- De inductiestap.
Stel dat de string $0(10)^p$ afleidbaar is. Omdat ook het axioma (0) afleidbaar is, volgt door toepassen van de afleidingsregel dat de string $010(10)^p = 0(10)^{p+1}$ afleidbaar is.

Dus voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat de string $0(10)^n$ afleidbaar is.

(b) Een afleiding van de string 1 in vier stappen:

1. 00 (axioma)
2. 00 (met R1 uit 1)
3. 00 (met R1 uit 2)
4. 1 (met R3 uit 3)

(c) De string 000 is niet afleidbaar.

We definiëren de stringeigenschap I : het aantal 0'en is even. We laten zien dat I een invariant is:

- I geldt voor het axioma want dat bevat twee 0'en.
- I blijft behouden onder toepassen van R1: als I geldt voor de string $x0$, dan geldt I ook voor de string xx want het aantal 0'en in die string is twee keer het aantal 0'en in de string x , dus een tweevoud.
- I blijft behouden onder toepassen van R2: als I geldt voor de string x en ook voor de string y dan geldt I ook voor de string xy want een even aantal plus een even aantal is weer een even aantal.
- I blijft behouden onder toepassen van R3: als I geldt voor de string $x00y$ dan geldt I ook voor de string $x1y$ want een even aantal min twee is weer een even aantal.

Dus I is een invariant. De eigenschap I geldt niet voor de string 000. Die string is dus niet afleidbaar.

Opgave 8. (uit tentamen 26 maart 2003)

Gegeven is een deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

10

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x}{x0}$$

$$(R2) \quad \frac{x0}{x10}$$

(a) Geef een afleiding van de string 110100.

10

- (b) Is de string 110101 afleidbaar? Geef een afleiding, of bewijs dat de string niet afleidbaar is.
- (c) Is dit systeem beslisbaar? Waarom (niet)?

Uitwerking van opgave 8:

- (a) Een afleiding van de string 110100:
1. 10 (axioma)
 2. 110 (uit 1 met R2)
 3. 1100 (uit 2 met R1)
 4. 11010 (uit 3 met R2)
 5. 110100 (uit 4 met R1)
- (b) De string 110101 is niet afleidbaar. Definieer de stringeigenschap I : de string eindigt op een 0. We laten zien dat I een invariant is.
- Het axioma 10 voldoet aan I .
 - De conclusie $x0$ van $R1$ voldoet aan I .
 - De conclusie $x10$ van $R2$ voldoet aan I .
- Alle afleidbare strings voldoen aan I . De string 110101 voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.
- (c) Het systeem is beslisbaar want er zijn eindig veel axioma's en alleen verlengende regels.

Opgave 9. (uit hertentamen 15 augustus 2003)

Gegeven is een deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

$$101$$

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x \quad y}{1x1y1} \qquad (R2) \quad \frac{x111y}{xy}$$

- (a) Geef alle strings die je in ten hoogste 3 stappen kunt afleiden.
(NB: het opschrijven van het axioma telt als één stap.)
- (b) Geef een afleiding van de sting 110100111.
- (c) Waarom is de string 010 niet afleidbaar?
Hint: gebruik *niet* de invariant-methode, maar kijk naar de strings die je in (a) hebt afgeleid.

Uitwerking van opgave 9:

- (a) De strings die in ten hoogste drie stappen af te leiden zijn: 101, 110111011, 110111101110111, 111011101111011, 111011101111101110111, 110011.
- (b) Een afleiding van de sting 110100111:
1. 101 (axioma)
 2. 1 101 1 101 1 (uit 1 met R1)
 3. 1 101 1 1 101 1 101 1 1 (uit 2 met R1)
 4. 1 101 01 1 101 1 1 (uit 3 met R2)
 5. 1 101 0 01 1 1 (uit 4 met R2)
- (c) De string 010 is niet afleidbaar: alle strings met twee 0'en die afleidbaar zijn zijn 110111011 en 110011. Op die laatste string kan R2 niet meer toegepast worden, en toepassen van R1 levert nieuwe 0'en erbij die je niet meer kunt kwijtraken.

Opgave 10. (uit tentamen 23 maart 2004)

Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

b

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{xb \quad y}{xay} \qquad (R2) \quad \frac{ax}{x}$$

- a. Geef een afleiding van de string $aaab$.
- b. Laat zien dat de string $aaabb$ niet afleidbaar is.
- c. Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

Uitwerking van opgave 10:

- a.
 1. b (axioma)
 2. ab (uit 1 met R1)
 3. $aaab$ (uit 2 met R1)
- b. We definiëren I als volgt: de string bevat precies één b . We laten zien dat I een invariant is.
 - Het axioma (b) voldoet aan I .
 - Stel dat de premissen van R1 aan I voldoen. Dan bevat x geen b , en y bevat precies één b . Dan bevat de string xay ook precies één b .
 - Stel dat de premisse van R2 aan I voldoet. Dan bevat x precies één b , ofwel, de conclusie van R2 bevat dan ook precies één b .

Dus I is een invariant. Dat betekent dat alle afleidbare strings aan I voldoen. De string $aaabb$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

- c. Ja het systeem is beslisbaar. We laten zien dat $\{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$ de verzameling afleidbare strings is.
- We laten met inductie naar n zien dat elke string van de vorm $a^n b$ afleidbaar is.
Om te beginnen: $a^0 b = b$ is afleidbaar want het is het axioma.
De inductiestap: stel nu dat $a^n b$ met $n > 0$ afleidbaar is. We passen R1 toe met $x = a^n$ en $y = b$. Dan volgt dat $a^{n+1} b$ afleidbaar is.
 - We laten zien dat elke afleidbare string van de vorm $a^n b$ is.
Het axioma is van de vorm $a^n b$ (met $n = 0$).
Stel dat de premissen van R1 van de vorm $a^n b$ en $a^m b$ zijn. Dan geldt $x = a^n$ en $y = a^m b$. Dan is de conclusie van R1 de string $a^n a^m b$, dus ook van de goede vorm.
Stel dat de premisse van R2 van de vorm $a^n b$ is. Dan is de conclusie dat ook, alleen met één a minder.

Opgave 11. (uit hertentamen 29 juni 2004) Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

$$ab$$

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x \quad ay}{xy} \qquad (R2) \quad \frac{xbb}{x}$$

- Geef een afleiding van de string $abbbb$.
- Laat zien dat de string $babbb$ niet afleidbaar is.
- Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

Uitwerking van opgave 11:

Opgave 12. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

$$ab$$

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x \quad ay}{xy} \qquad (R2) \quad \frac{xbb}{x}$$

- Geef een afleiding van de string $abbbb$.

- b. Laat zien dat de string $babbb$ niet afleidbaar is.
- c. Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

Uitwerking van opgave 12:

- a. Een afleiding van de string $abbbb$:
- (1) ab (axioma)
 - (2) abb (uit (1) met R1)
 - (3) $abbbb$ (uit (2) met R1)
- b. We definiëren de stringeigenschap I : de string begint met een a . We laten zien dat I een invariant is.
- Het axioma ab voldoet aan I .
 - Stel dat de premissen x en ay van regel $R1$ aan I voldoen. Dan begint x met een a . Dan begint de conclusie van $R1$, namelijk xy , ook met een a . Dus I blijft behouden onder toepassing van $R1$.
 - Stel dat de premisse xbb van $R2$ aan I voldoet. Dan begint x met een a . Dan begint de conclusie van $R2$, namelijk x , ook met een a . Dus I blijft behouden onder toepassing van $R2$.

Dus I is een invariant. De string $babbb$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

- c. Het systeem is beslisbaar. De afleidbare strings zijn precies alle strings van de vorm ab^n met $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ten eerste laten we zien dat elke afleidbare string van de vorm ab^n is. (Dat betekent dat *de string is van de vorm ab^n* een invariant is.)

- Het axioma is van de vorm ab^n namelijk met $n = 1$.
- Stel dat de premissen van $R1$ van de vorm ab^n zijn. Dat betekent dat $x = ab^p$ en $y = b^q$ met $p, q \in \mathbb{N}$. Dan geldt $xy = ab^{p+q}$, dus de conclusie van R_1 is ook van de goede vorm.
- Stel dat de premisse van $R2$ van de vorm ab^n is. Dat betekent $x = ab^p$ met $p \in \mathbb{N}$. Dan is de conclusie van $R2$, namelijk x , ook van de goede vorm.

Ten tweede laten we zien dat elke string van de vorm ab^n met $n \in \mathbb{N}$ afleidbaar is. (NB: n hoeft niet even te zijn.) Dit bewijzen we met inductie naar n .

Basisgeval:

$n = 0$. Hier is een afleiding van de string a :

- (1) ab (axioma)
- (2) abb (uit (1) met R1)
- (3) a (uit (2) met R2)

Inductiestap:

stel dat ab^p afleidbaar is. We laten zien dat ab^{p+1} afleidbaar is. We gebruiken $R1$ met $x = ab^p$ en $y = b$. (De string $ay = ab$ is het axioma dus afleidbaar.) Toepassen van $R2$ levert de string ab^{p+1} .

Opgave 13. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{c, d\}$ met één axioma:

$$ccd$$

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x}{dcxdc} \qquad (R2) \quad \frac{xdcy}{dxydc}$$

- a. Geef een afleiding van de string $dddcccc$.
- b. Laat zien dat de string $dddcdcc$ niet afleidbaar is.

Uitwerking van opgave 13:

- a. Een afleiding van de string $dddcccc$:

$$\begin{array}{ll} (1) & ccd \qquad \qquad \qquad \text{(axioma)} \\ (2) & dcccddc \qquad \qquad \qquad \text{(uit (1) met R1)} \\ (3) & ddcccddc \quad \text{(uit (2) met R2 met } x = dccc \text{ en } y = \lambda) \\ (4) & dddcccc \quad \text{(uit (3) met R2 en } x = ddccc \text{ en } y = \lambda) \end{array}$$

- b. We definiëren de stringeigenschap I als volgt: ‘de string bevat meer c 's dan d 's'. We laten zien dat I een invariant is.

- Het axioma ccd voldoet aan I .
- Stel dat de premisse x van $R1$ aan I voldoet. Dan voldoet de conclusie $dcxdc$ ook aan I ; immers, er komen twee d 's en twee c 's bij, dus het aantal c 's blijft groter dan het aantal d 's.
- Stel dat de premisse $xdcy$ voldoet aan I . Door toepassen van $R2$ verandert het aantal c 's en d 's niet, dus ook de conclusie van $R2$ voldoet ook aan I .

Dus I is een invariant. De string $dddcdcc$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

Opgave 14. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

$$ab$$

en één afleidingsregel:

$$(R) \quad \frac{xb \quad y}{bxy}$$

- (a) Geef een afleiding van de string *babaab*.
- (b) Is de string *babbaaba* afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.
- (c) Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

Uitwerking van opgave 14:

a. Een afleiding van de string *babaab*:

- (1) *ab* (axioma)
 (2) *baab* (uit (1) met R)
 (3) *babaab* (uit (2) met R)

b. We definiëren de stringeigenschap *I*: ‘de string eindigt op een *b*’. We laten zien dat *I* een invariant is.

- Het axioma *ab* voldoet aan *I*.
- Stel dat de premissen *ax* en *y* van regel R aan *I* voldoen. Dan eindigt *y* op een *b*. Dan eindigt de conclusie van R, namelijk *bxy*, ook op een *b*. Dus *I* blijft behouden onder toepassing van R.

Dus *I* is een invariant. De string *babbaaba* voldoet niet aan *I* en is dus niet afleidbaar.

c. Er zijn eindig veel axioma’s, namelijk één. Verder geldt dat de afleidingsregel R verlengend is: De lege string λ is niet afleidbaar, omdat λ niet voldoet aan de invariant uit 1b. Stel dat *xb* en *y* afleidbare strings zijn. Dan is de string *bxy* langer dan de string *xb* omdat *y* ten minste één symbool bevat. De string *bxy* is ook langer dan de string *y* omdat er in elk geval het symbool *b* bijkomt.

Een systeem met eindig veel axioma’s en alleen verlengende regels is beslisbaar, dus het systeem van deze opgave is beslisbaar.

Opgave 15. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

ab

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{axb}{x}$$

$$(R2) \quad \frac{ax \quad yb}{axyb}$$

- (a) Geef alle strings die je in ten hoogste drie stappen kunt afleiden.
NB: Het axioma telt als één stap.
- (b) Is de string $ababa$ afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.
- (c) (i) Bewijs dat alle strings van de vorm $(ab)^n$ met $n \in \mathbb{N}$ afleidbaar zijn.
(ii) Welke strings zijn nog meer afleidbaar?

Uitwerking van opgave 15:

- a. Alle strings die je in ten hoogste drie stappen kunt afleiden: ab , λ (de lege string), $abab$, $ababab$, $abababab$, ba .
- b. We definiëren de stringeigenschap I als volgt: ‘de string bevat evenveel a 's als b 's'. We laten zien dat I een invariant is.
- Het axioma ab voldoet aan I .
 - Stel dat de premisse axb van R1 aan I voldoet. Dan voldoet de conclusie $dcxdc$ ook aan I ; immers, er wordt één a en één b weggehaald. Het aantal a 's blijft dan gelijk aan het aantal b 's.
 - Stel dat de premissen ax en yb van R2 aan I voldoen. Dan is in xy het aantal a 's gelijk aan het aantal b 's. Dan is in de conclusie $axyb$ het aantal a 's ook gelijk aan het aantal b 's, dat wil zeggen, ook de conclusie van R2 voldoet aan I .

Dus I is een invariant. De string $ababa$ voldoet niet aan I en is dus niet afleidbaar.

- (c) (i) We laten zien dat alle strings van de vorm $(ab)^n$ afleidbaar zijn met inductie naar n .

Het geval $n = 0$: de string λ is afleidbaar. Een afleiding van λ is:

- (1) ab (axioma)
(2) λ (uit (1) met R1)

Het geval $n > 0$: stel dat de string $(ab)^n$ afleidbaar is. We passen regel R2 toe op de afleidbare strings $(ab)^n$ en ab , dus met $x = b(ab)^{n-1}$ en $y = a$:

$$\frac{(ab)^n \quad ab}{ab(ab)^{n-1}ab}$$

Dit levert de string $ab(ab)^{n-1}ab = (ab)^{n+1}$.

- (ii) Strings van de vorm $(ba)^n$ zijn ook nog afleidbaar.

Opgave 16. Van een deductief systeem is gegeven dat het, naast de axioma's, alleen verkortende regels bevat. Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

Uitwerking van opgave 16:

Als een systeem eindig veel axioma's en alleen verkortende regels heeft is het beslisbaar. We genereren de afleidbare strings als volgt. Eerst de strings die in 1 stap afleidbaar zijn. Dat zijn alle axioma's. Dan de strings die in 2 stappen afleidbaar zijn. Die zijn allemaal korter dan het langste axioma (omdat de regels verkortend zijn). Dan de strings die in 3 stappen afleidbaar zijn. Die zijn allemaal korter dan de langste string die in 2 stappen afleidbaar is. Dit proces moet dus eindigen en levert ons alle afleidbare strings. Gegeven een string is het dus makkelijk te zien of die afleidbaar is: kijk of hij in de eindige lijst van afleidbare strings voorkomt.

Opgave 17. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

a

en twee afleidingsregels:

$$\frac{ax}{xb} (R_1) \quad \frac{xb}{axb} (R_2)$$

- (a) Geef een afleiding van de string $bbbb$.
- (b) Is de string baa afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.
- (c) Laat zien dat elke string van de vorm $a^k b^l$ met $k \geq 1$ en $l \geq 1$ afleidbaar is.

Uitwerking van opgave 17:

- (a) Er zijn vijf mogelijke afleidingen van de string $bbbb$. Eén mogelijke afleiding is bijvoorbeeld:
 - (1) a (axioma)
 - (2) b (uit 1 met R1)
 - (3) ab (uit 2 met R2)
 - (4) bb (uit 3 met R1)
 - (5) abb (uit 4 met R2)
 - (6) bbb (uit 5 met R1)
 - (7) $abbb$ (uit 6 met R2)
 - (8) $bbbb$ (uit 7 met R1)
- (b) De string baa is niet afleidbaar. Definieer de volgende eigenschap I over strings: I : "de string begint met een a of eindigt op een b ". We laten zien

dat I een *invariant* is met betrekking tot het gegeven deductie-systeem. Het axioma begint met een a , dus voldoet aan I , en de conclusies van beide regels voldoen aan I . Dus: voor alle afleidbare strings geldt I . Voorts hebben we dat I *niet* geldt voor baa , dus baa is niet afleidbaar.

- (c) We bewijzen met inductie dat alle strings van de vorm $a^k b^l$ met $k \geq 1$ en $l \geq 1$ afleidbaar zijn.

Basisstap: De string a en de string b zijn alletwee afleidbaar. a omdat het een axioma is, en b omdat die verkregen wordt uit a door toepassen van $R1$ op a .

Inductiestap: Stel $a^k b^l$ is afleidbaar. We laten zien dat $a^{k+1} b^l$ en $a^k b^{l+1}$ allebei afleidbaar zijn.

De string $a^k b^l$ is afleidbaar (inductiehypothese) en eindigt op ten minste één b . Dus kunnen we $R2$ toepassen, en vinden zo dat $a^{k+1} b^l$ afleidbaar is.

De string $a^{k+1} b^l$ is afleidbaar en begint met ten minste a . Toepassen van $R1$ levert $a^k b^{l+1}$.

Opgave 18. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\{a, b\}$ met één axioma:

aa

en drie afleidingsregels:

$$\frac{xa}{xx} (R_1) \quad \frac{x}{xy} \frac{y}{xy} (R_2) \quad \frac{xaay}{xby} (R_3)$$

- (a) Geef een afleiding van de string bb .
- (b) Is de string aaa afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.
- (c) Laat zien dat voor elke $n > 0$ de string b^n afleidbaar is.

Uitwerking van opgave 18:

- (a) Er zijn 5(!) mogelijke afleidingen van de string bb . Bijvoorbeeld:

- (1) aa (axioma)
- (2) b (uit 1 met $R3$)
- (3) bb (uit 2 met $R2$)

- (b) We laten zien dat de string aaa niet afleidbaar is. We definiëren de volgende stringeigenschap P : “de string heeft een even aantal a -tjes”.

Ten eerste: P is een invariant. Allereerst voldoet het axioma aan P , het aantal a -tjes in aa is 2 dus even. Verder: P blijft behouden onder het toepassen van de regels:

R_1 De conclusie van R_1 is xx ; het aantal a 'tjes daarin is 2 keer het aantal a 'tjes in x dus even.

R_2 Stel dat de premissen aan P voldoen, dwz. zowel x als y bevat een even aantal a 'tjes. Dan bevat de string xy ook een even aantal a 'tjes (want een even getal plus een even getal is weer even).

R_3 Stel $xaay$ bevat een even aantal a 'tjes. De string xy bevat twee a 'tjes minder. Dat is weer een even aantal, want een even getal min twee levert weer een even getal.

Conclusie: P is een invariant (dus voor elke afleidbare string geldt P).

Ten tweede: de string aaa voldoet niet aan P .

Tenslotte: omdat aaa niet aan de invariant P voldoet volgt dat aaa niet afleidbaar is.

(c) We bewijzen met inductie naar $n \in \mathbb{N}$ dat alle strings b^{n+1} afleidbaar zijn.

(basis) Te bewijzen: b is afleidbaar. Dit volgt uit een toepassing van regel R_3 op het het axioma.

(stap) Stel b^{n+1} is afleidbaar (inductiehypothese). Te bewijzen: b^{n+2} is afleidbaar. Om te beginnen is de string b afleidbaar (uit het axioma en een toepassing van R_3). Nu passen we R_2 toe met $x = b$ en $y = b^{n+1}$. Dat levert de string b^{n+2} , dus b^{n+2} is afleidbaar.