

**opgaven formele structuren ‘procesalgebra’**

**Opgave 1.** (opgave 3.3.7 op p.97 van het dictaat 2005) Een mier moet van links voor onder naar rechts achter boven op een kubus, met acties  $a$  (rechts),  $b$  (achter), en  $c$  (boven).

*Uitwerking van opgave 1:*

- (i) Een mogelijke wandeling is  $a \cdot b \cdot c$ , dus naar rechts, naar achter, naar boven.
- (ii) Er zijn  $3! = 6$  verschillende wandelingen mogelijk.
- (iii) Er zijn verschillende antwoorden mogelijk:

$$a \parallel b \parallel c = a \cdot (b \cdot c + c \cdot b) + b \cdot (a \cdot c + b \cdot c) + c \cdot (a \cdot b + b \cdot a)$$

en ook bijvoorbeeld

$$(b \parallel c) \cdot a + (a \parallel c) \cdot b + (a \parallel b) \cdot c = b \cdot c \cdot a + c \cdot b \cdot a + a \cdot c \cdot b + c \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot c + b \cdot a \cdot c$$

**Opgave 2.** (opgave 3.3.9 op p.98 van het dictaat 2005)

*Uitwerking van opgave 2:*

$a^3 \parallel b^3 \parallel c^3$ . Er zijn weer ook andere antwoorden mogelijk.

**Opgave 3.** Gegeven zijn de recursief gedefinieerde processen

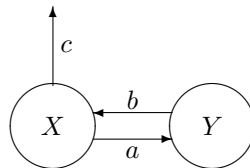
$$\begin{aligned} X &= a \cdot Y + c \\ Y &= b \cdot X \end{aligned}$$

Hier is  $Y$  een hulpproces.

- (a) Teken de procesgraaf van  $X$ .
- (b) Geef drie verschillende eindige traces van  $X$ .
- (c) Geef het oneindige trace van  $X$ .

*Uitwerking van opgave 3:*

- (a) De procesgraaf van  $X$  is:



- (b) Drie eindige traces van  $X$  zijn bijvoorbeeld  $c$ ,  $a \cdot b \cdot c$ , en  $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot c$ .
- (c) Het oneindige trace van  $X$  is  $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots$  ook wel geschreven als  $(a \cdot b)^\omega$ .

**Opgave 4:** Deze opgave gaat over de merge *zonder communicatie*. Je kunt aan de acties  $s(1)$  en  $r(1)$  denken als *send(1)* en *receive(1)*, en net zo voor  $s$  en  $r$  met argument 2. We bekijken de procesterm

$$P = (s(1) \cdot r(2)) \parallel (r(1) \cdot s(2))$$

- (a) Gebruik de axioma's om de term  $P$  te herschrijven tot een term zonder merge en zonder left-merge.
- (b) Teken de procesgraaf van  $P$ .

*Uitwerking van opgave 4:*

- (a)

$$\begin{aligned}
& s(1) \cdot r(2) \parallel r(1) \cdot s(2) && = \\
& s(1) \cdot r(2) \parallel r(1) \cdot s(2) + r(1) \cdot s(2) \parallel s(1) \cdot r(2) && = \\
& s(1) \cdot (r(2) \parallel r(1) \cdot s(2)) + r(1) \cdot (s(2) \parallel s(1) \cdot r(2)) && = \\
& s(1) \cdot (r(2) \parallel r(1) \cdot s(2) + r(1) \cdot s(2) \parallel r(2)) + r(1) \cdot (s(2) \parallel s(1) \cdot r(2) + s(1) \cdot r(2) \parallel s(2)) && = \\
& s(1) \cdot (r(2) \cdot r(1) \cdot s(2) + r(1) \cdot (s(2) \cdot r(2) + r(2) \cdot s(2))) && \\
& + r(1) \cdot (s(2) \cdot s(1) \cdot r(2) + s(1) \cdot (r(2) \cdot s(2) + s(2) \cdot r(2))) &&
\end{aligned}$$

- (b) We geven de graaf hier niet; de structuur is hetzelfde als die van Figuur 3.2 van het dictaat 2005.

**Opgave 5:** Deze opgave gaat over de merge *met communicatie*. We bekijken weer de procesterm

$$P = (s(1) \cdot r(2)) \parallel (r(1) \cdot s(2))$$

en gaan nu uit van de volgende communicaties:

$$\begin{aligned}
s(1) \mid r(1) &= c(1) \\
s(2) \mid r(2) &= c(2)
\end{aligned}$$

Je kunt aan de actie  $c(1)$  denken als *communication(1)*, en net zo voor  $c$  met argument 2.

- (a) Geef een trace van  $P$  waar twee keer communicatie plaatsvindt.
- (a) Geef een trace van  $P$  waar geen communicatie plaatsvindt.
- (c) Teken  $\Delta(\mathcal{G}(P))$ .

*Uitwerking van opgave 5:*

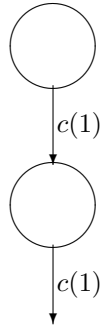
- (a)  $c(1) \cdot c(2)$ .
- (b) Bijvoorbeeld  $s(1) \cdot r(2) \cdot r(1) \cdot s(2)$ .
- (c) Die ziet eruit als het antwoord op opgave 4b, met daarbij nog een mid-dentak van de vorm actie  $c(1)$  gevolgd door of  $r(2) \cdot s(2)$  of door actie  $c(2)$  of door  $s(2) \cdot r(2)$ .

**Opgave 6.** We bekijken weer de procesterm

$$P = (s(1) \cdot r(2)) \parallel (r(1) \cdot s(2))$$

met communicaties gedefinieerd als in het vorige onderdeel. Teken  $\partial(P)$ .

*Uitwerking van opgave 6:*



**Opgave 7.** We gaan uit van de communicatie

$$c \mid c^* = \underline{c}$$

De andere communicaties leveren  $\delta$  op.

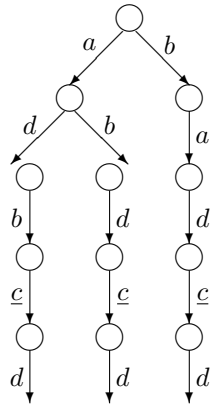
Teken  $\Delta(\mathcal{G}((a \cdot d \cdot c) \parallel (b \cdot c^* \cdot d)))$ .

*Uitwerking van opgave 7:*

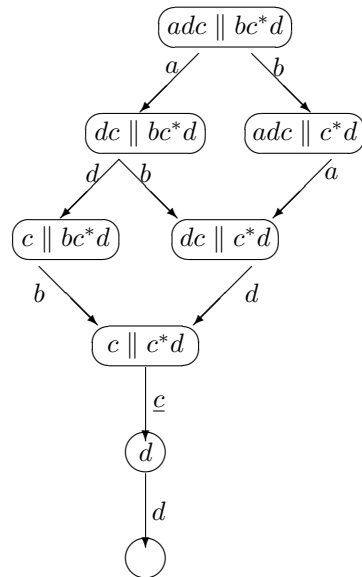
Het proces  $\partial((a \cdot d \cdot c) \parallel (b \cdot c^* \cdot d))$  heeft drie traces:

$$adb\underline{cd}, ab\underline{dcd}, ba\underline{dcd}$$

De procesgraaf ziet er zo uit:



Betere tekening:



**Opgave 8.** Gegeven zijn de recursief gedefinieerde processen

$$\begin{aligned} X &= a_1 \cdot a_2 \cdot c \cdot X \\ Y &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot c^* \cdot Y \end{aligned}$$

waar we weer uitgaan van de communicatie

$$c | c^* = \underline{c}$$

Geef twee verschillende oneindige traces van  $\partial(X||Y)$ .

*Uitwerking van opgave 8:*

Een oneindig trace van  $X$  is bijvoorbeeld  $a_1 a_2 b_1 b_2 b_3 \underline{c} \dots$ , dus  $(a_1 a_2 b_1 b_2 b_3 \underline{c})^\omega$ ,  
 en ook  $a_1 b_1 a_2 b_2 b_3 \underline{c} \dots$ , dus  $(a_1 b_1 a_2 b_2 b_3 \underline{c})^\omega$ .

Betere notatie(?):

Twee verschillende oneindige traces:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \underline{c} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \underline{c} \cdot \dots$$

en

$$a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \underline{c} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \underline{c} \cdot \dots$$

**Opgave 9.** (We werken hier met merge zonder communicatie.)

Reken de procesterm  $(a + a \cdot b) \parallel b \cdot a$  uit tot een procesterm waar merge ( $\parallel$ ) en left-merge ( $\ll$ ) niet in voorkomen, en teken de procesgraaf van de gevonden basisterm.

*Uitwerking van opgave 9:*

$$\begin{aligned} (a + a \cdot b) \parallel b \cdot a &= \\ (a + a \cdot b) \ll b \cdot a + b \cdot a \ll (a + a \cdot b) &= \\ a \ll b \cdot a + a \cdot b \ll b \cdot a + b(a \parallel (a + a \cdot b)) &= \\ a \cdot b \cdot a + a \cdot (b \parallel b \cdot a) + b(a \ll (a + a \cdot b) + (a + a \cdot b) \ll a) &= \\ a \cdot b \cdot a + a \cdot (b \ll b \cdot a + b \cdot a \ll b) + b(a \cdot (a + a \cdot b) + a \ll a + a \cdot b \ll a) &= \\ a \cdot b \cdot a + a \cdot (b \cdot b \cdot a + b \cdot (a \cdot b + b \cdot a)) + & \\ b(a \cdot (a + a \cdot b) + a \cdot a + a \cdot (b \cdot a + a \cdot b)) & \end{aligned}$$

De procesgraaf tekenen we hier niet.

**Opgave 10.**

(a) Bekijk de recursief gedefinieerde processen

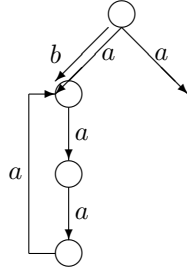
$$\begin{aligned} X &= (a + b)Y + a \\ Y &= a \cdot a \cdot a \cdot Y \end{aligned}$$

Hier is  $Y$  het hulpproces. Geef de procesgraaf van  $X$ .

(b) Vereenvoudig de procesterm  $(\delta \cdot \delta + a)(b + \delta)$  zoveel mogelijk. Is dit proces deadlock-vrij?

*Uitwerking van opgave 10:*

(a) De procesgraaf ziet er als volgt uit:



(b) Voor de vereenvoudiging gebruiken we de regels van tabel 6.2.1:

$$\begin{aligned}
 (\delta \cdot \delta + a) \cdot (b + \delta) &= \\
 (\delta + a) \cdot (b + \delta) &= \\
 a \cdot (b + \delta) &= \\
 a \cdot b &
 \end{aligned}$$

Dit proces is deadlock-vrij.

**Opgave 11.** (uit tentamen 30 mei 2000)

(a) We werken hier met merge zonder communicatie; de axioma's van procesalgebra zijn gegeven als bijlage.

Reken de procesterm van  $(a+b) \parallel a$  uit tot basisprocesterm (zonder merge ( $\parallel$ ) en left-merge ( $\ll$ )), en teken de procesgraaf van de gevonden basisterm.

(b) Geef de procesgraaf van  $X$ , gedefinieerd als (met  $Y$  het hulproces):

$$\begin{aligned}
 X &= a \cdot (a + b) + (a + b) \cdot Y \\
 Y &= a \cdot Y
 \end{aligned}$$

**Opgave 12.** (uit hertentamen 17 augustus 2000)

(a) We werken hier met merge zonder communicatie; de axioma's van procesalgebra zijn gegeven als bijlage.

Reken de procesterm van  $(a \cdot b) \parallel (c + a)$  uit tot basisprocesterm (zonder merge ( $\parallel$ ) en left-merge ( $\ll$ )).

(b) Teken de procesgraaf van de basisterm gevonden in (a).

(c) Teken de procesgraaf van het recursieve proces  $X$  dat eerst een  $a$ -stap doet, dan of een  $b$ -stap of een  $c$ -stap, en daarna weer zichzelf is.

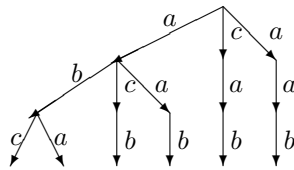
(d) Geef de recursievergelijking van het proces  $X$  getekend als antwoord op vraag (c).

*Uitwerking van opgave 12:*

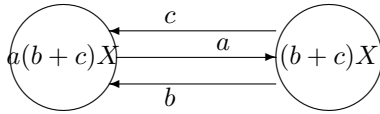
(a)

$$\begin{aligned}
& (a \cdot b) \parallel (c + a) & = \\
& (a \cdot b) \parallel (c + a) + (c + a) \parallel (a \cdot b) & = \\
& a \cdot (b \parallel (c + a)) + c \parallel (a \cdot b) + a \parallel (a \cdot b) & = \\
& a \cdot (b \parallel (c + a) + (c + a) \parallel b) + c \cdot a \cdot b + a \cdot a \cdot b & = \\
& a \cdot (b \cdot (c + a) + c \parallel b + a \parallel b) + c \cdot a \cdot b + a \cdot a \cdot b & = \\
& a \cdot (b \cdot (c + a) + c \cdot b + a \cdot b) + c \cdot a \cdot b + a \cdot a \cdot b & =
\end{aligned}$$

(b)



(c)



(d)  $X = a(b + c)X.$

**Opgave 13.** (opgave 3.3.8 op p98 van het dictaat 2005)

*Uitwerking van opgave 13:*

$a \parallel b \parallel (c \cdot c).$  (Er zijn ook andere antwoorden mogelijk.) Dit proces heeft 12 traces.

**Opgave 14.** (uit tentamen 30 maart 2001)

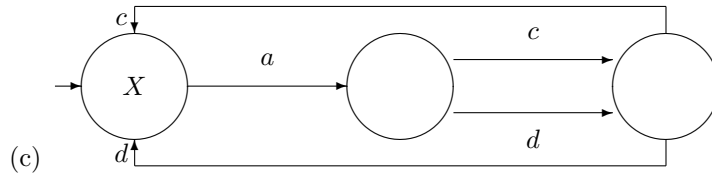
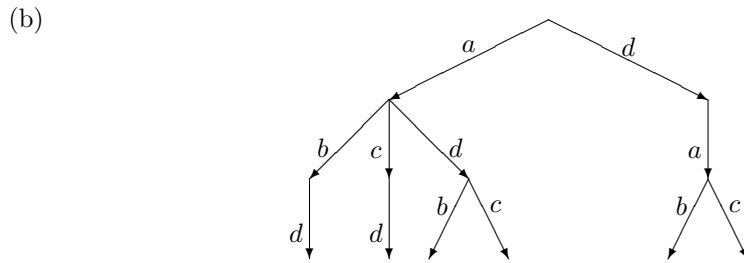
- (a) Reken de procesterm  $(a \cdot (b + c)) \parallel d$  uit tot basisprocesterm.
- (b) Teken de procesgraaf van de basisprocesterm gevonden als antwoord op 5(a).
- (c) Geef de procesgraaf van  $X$ , gedefinieerd als volgt (met  $Y$  het hulproces):

$$\begin{aligned}
X &= a \cdot (c + d) \cdot Y \\
Y &= (c + d) \cdot X
\end{aligned}$$

*Uitwerking van opgave 14:*

(a)

$$\begin{aligned}
 &(a \cdot (b + c)) \parallel d &&= \\
 &a \cdot (b + c) \parallel d + d \parallel a \cdot (b + c) &&= \\
 &a \cdot ((b + c) \parallel d) + d \cdot a \cdot (b + c) &&= \\
 &a \cdot ((b + c) \parallel d + d \parallel (b + c)) + d \cdot a \cdot (b + c) &&= \\
 &a \cdot (b \parallel d + c \parallel d + d \cdot (b + c)) + d \cdot a \cdot (b + c) &&= \\
 &a \cdot (b \cdot d + c \cdot d + d \cdot (b + c)) + d \cdot a \cdot (b + c)
 \end{aligned}$$



**Opgave 15.** (uit hertentamen 17 augustus 2001)

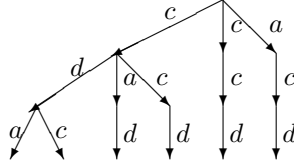
- (a) Reken de procesterm  $(a + c) \parallel (c \cdot d)$  uit tot basisprocesterm.
- (b) Teken de procesgraaf van de basisprocesterm gevonden als antwoord op 5(a).
- (c) Geef de specificatie van een proces  $X$  met het oneindige trace  $aaa \dots$

*Uitwerking van opgave 15:*

(a)

$$\begin{aligned}
 &(a + c) \parallel (c \cdot d) &&= \\
 &(a + c) \parallel (c \cdot d) + (c \cdot d) \parallel (a + c) &&= \\
 &a \parallel (c \cdot d) + c \parallel (c \cdot d) + c \cdot (d \parallel (a + c)) &&= \\
 &a \cdot c \cdot d + c \cdot c \cdot d + c \cdot (d \parallel (a + c) + (a + c) \parallel d) &&= \\
 &a \cdot c \cdot d + c \cdot c \cdot d + c \cdot (d \cdot (a + c) + a \parallel d + c \parallel d) &&= \\
 &a \cdot c \cdot d + c \cdot c \cdot d + c \cdot (d \cdot (a + c) + a \cdot d + c \cdot d)
 \end{aligned}$$

(b)



(c)  $X = a \cdot X$ .

**Opgave 16.** Gegeven is het proces  $P = ((a \cdot c \cdot a) + b) \parallel (d \cdot c^*)$ . We hebben de communicatie  $c \mid c^* = \underline{c}$ ; de andere communicaties leveren  $\delta$  op.

- (a) Geef de procesgraaf van  $P$ .
- (b) Geef de procesgraaf van  $\partial(P)$ , waarbij de ‘halve acties’  $c$  en  $c^*$  weggeveegd worden en alle andere acties behouden blijven.

**Opgave 17.** Gegeven zijn de recursief gedefinieerde processen  $X$  en  $Y$ :

$$\begin{aligned} X &= a \cdot (b + c) \cdot X \\ Y &= d \cdot c^* \cdot e \cdot Y \end{aligned}$$

met communicatie  $c \mid c^* = \underline{c}$ ; de andere communicaties leveren  $\delta$  op.

Geef twee verschillende oneindige traces van  $\partial(X \parallel Y)$  (zonder deadlock).

**Opgave 18.** Geef een recursief proces  $X$  dat als traces heeft:  $aaa\dots$  en  $ababab\dots$  (Er mogen ook andere traces zijn dan deze twee.)

**Opgave 19.** (uit tentamen 5 juni 2002)

- (a) Reken de procesterm  $(a + b \cdot c) \parallel d$  uit tot basisprocesterm.
- (b) Geef een beschrijving van een proces met het oneindige trace  $ababab\dots$
- (c) Teken de procesgraaf van het proces gegeven door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} X &= (b + c) \cdot a \cdot Y + d \\ Y &= c \cdot X \end{aligned}$$

(met  $Y$  als hulproces).

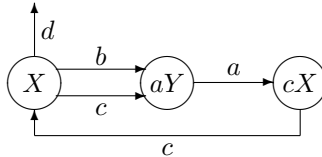
*Uitwerking van opgave 19:*

(a)

$$\begin{aligned} (a + bc) \parallel d &= \\ (a + bc) \parallel d + d \parallel (a + bc) &= \\ a \parallel d + bc \parallel d + d \parallel (a + bc) &= \\ ad + b(c \parallel d) + d(a + bc) &= \\ ad + b(c \parallel d + d \parallel c) + d(a + bc) &= \\ ad + b(cd + dc) + d(a + bc) &= \end{aligned}$$

(b)  $X = abX$ .

(c)



**Opgave 20:** (uit hertentamen 16 augustus 2002)

- (a) Reken de procesterm  $(a + b) \parallel (d \cdot e)$  uit tot basisprocesterm. (De axioma's van de procesalgebra worden hieronder gegeven.)
- (b) Teken de procesgraaf van de basisterm gevonden in 5a.
- (c) Geef de procesgraaf van  $X$ , gedefinieerd door het stelsel

$$\begin{aligned} X &= a \cdot b \cdot X + c \cdot Y \\ Y &= (a \cdot a + b) \cdot X \end{aligned}$$

**Opgave 21.** (uit tentamen 26 maart 2003)

- (a) Werk de procesterm  $ab \parallel (a + c)$  uit tot een basis procesterm (dus zonder  $\parallel$  en zonder  $\llbracket$ ). Maak hierbij gebruik van de axioma's onderaan de pagina.
- (b) De processen  $X$  en  $Y$  zijn recursief gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} X &= aY \\ Y &= bX + cY \end{aligned}$$

Teken de procesgraaf van  $X$ .

- (c) Hier zijn  $c$  en  $c^*$  'halve' acties met communicatie  $c|c^* = c^*|c = \underline{c}$ .
  - (i) Teken de procesgraaf van  $\partial(ac \parallel (b + c^*))$ . (Dit is de procesgraaf waar de  $\delta$ 's zoveel mogelijk uit verwijderd zijn, dus de 'opgeschoonde' variant.)
  - (ii) Geef van dit proces  $\partial(ac \parallel (b + c^*))$  het deadlockvrije trace.
- (d) Ook hier zijn  $c$  en  $c^*$  'halve' acties met communicatie  $c|c^* = c^*|c = \underline{c}$ . Beschouw de recursieve processen

$$\begin{aligned} X &= a.c.c^*.X \\ Y &= c^*.b.c.Y \end{aligned}$$

Geef een oneindig trace van  $\partial(X \parallel Y)$ .

**Opgave 22.** (uit hertentamen 15 augustus 2003)

- (a) Werk de procesterm  $(a(b+c)) \parallel a$  uit tot een basisterm (dus zonder  $\parallel$  en zonder  $\llbracket$ ). Maak hierbij gebruik van de axioma's onderaan de pagina.
- (b) De processen  $X$  en  $Y$  zijn recursief gedefinieerd door

$$\begin{aligned} X &= a + aX + aY \\ Y &= b + bY \end{aligned}$$

- (i) Teken de procesgraaf van  $X$ .
- (ii) Geef drie verschillende eindige traces van  $X$ .
- (iii) Geef drie verschillende oneindige traces van  $X$ .
- (c) Hier zijn  $c$  en  $c^*$  'halve' acties met communicatie  $c|c^* = c^*|c = \underline{c}$ . Gegeven zijn de recursieve processen

$$\begin{aligned} X &= c^* \cdot a \cdot X \\ Y &= b \cdot c \cdot Y \end{aligned}$$

Geef van het proces  $\partial(X \parallel Y)$  het oneindige deadlockvrije trace

**Opgave 23.** Laat van de volgende paren van procestermen zien dat ze gelijk zijn met de axioma's van BPA. Teken ook de procesgrafieën, en laat zien dat die bisimulair zijn.

- a.  $(a + ab)(b + c) = a(b + c) + ab(b + c)$ ,
- b.  $(a + (b + c))(a + bc) = (a(a + bc) + b(a + bc)) + c(a + bc)$ .

*Uitwerking van opgave 23:*

- a.  $(a + ab)(b + c) = a(b + c) + ab(b + c)$  (A4)
- b.  $(a + (b + c))(a + bc) = (A4)$   
 $a(a + bc) + (b + c)(a + bc) = (A4)$   
 $a(a + bc) + (b(a + bc) + c(a + bc)) = (A2)$   
 $(a(a + bc) + b(a + bc)) + c(a + bc)$

De procesgrafieën zijn op het college gegeven.

Als je een bisimulatie moet aangeven tussen twee procesgrafieën die hetzelfde zijn is het voldoende om op te merken dat ze hetzelfde zijn en dus bisimulair. Als je een bisimulatie geeft tussen twee procesgrafieën, zorg er dan voor dat je duidelijk aangeeft wat de relatie op de knopen is; d.w.z. hoe de knopen van de ene procesgraaf gerelateerd zijn aan de knopen van de andere procesgraaf. Denk aan de drie eisen op bisimulaties gegeven in Definitie 1.5.1.

**Opgave 24.** Laat zien dat de volgende gelijkheden *niet* gelden met de axioma's van BPA, door te laten zien dat de bijbehorende procesgrafieën niet bisimulair zijn.

- a.  $a(b + c) = ab + a(b + c) + ac$ ,
- b.  $(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$ .

*Uitwerking van opgave 24:*

- a.  $BPA \not\models a(b + c) = ab + a(b + c) + ac$ .

Teken de procesgrafieën van  $a(b + c)$  ( $G$ ) en van  $ab + a(b + c) + ac$  ( $H$ ) en laat zien dat er geen bisimulatie tussen bestaat. De procesgrafieën zijn op het college getekend.

Als er een bisimulatie is tussen  $G$  en  $H$  dan moet de wortel van  $G$  aan de wortel van  $H$  gerelateerd zijn. Vanuit de wortel van  $G$  is er maar een mogelijkheid: een  $a$ -stap naar een knoop die we  $p$  noemen. Vanuit de wortel van  $H$  zijn er drie mogelijkheden: in alle gevallen  $a$ -stappen naar knopen die we  $q_1$ ,  $q_2$ , en  $q_3$  noemen. Vanuit  $q_1$  kun je alleen nog een  $b$ -stap doen. Vanuit  $q_2$  kun je zowel een  $b$ -stap als een  $c$ -stap doen. Vanuit  $q_3$  kun je alleen nog een  $c$ -stap doen. Als er een bisimulatie is tussen  $G$  en  $H$  dan moet de knoop  $p$  in  $G$  gerelateerd zijn aan de knopen  $q_1$ ,  $q_2$ , en  $q_3$  in  $H$ . Vanuit  $p$  kun je zowel een  $a$ -stap als een  $b$ -stap doen. Vanuit  $q_1$  kun je alleen een  $b$ -stap doen. Dus er kan geen bisimulatie geconstrueerd worden tussen  $G$  en  $H$ .

- b.  $BPA \not\models (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$ .

Teken de procesgrafieën van  $(a + b)(a + b)$  ( $G$ ) en van  $aa + ab + ba + bb$  ( $H$ ) en laat zien dat er geen bisimulatie tussen bestaat.

Als er een bisimulatie is tussen  $G$  en  $H$  dan moet de wortel van  $G$  aan de wortel van  $H$  gerelateerd zijn. Vanuit de wortel van  $G$  zijn er twee mogelijkheden: een  $a$ -stap en een  $b$ -stap. Als je de  $a$ -stap doet kom je in een knoop die we  $p$  noemen. Vanuit de wortel van  $H$  zijn er vier mogelijkheden: twee  $a$ -stappen en twee  $b$ -stappen. We bekijken de  $a$ -stappen; die brengen je in knopen die we  $q_1$  en  $q_2$  noemen. Vanuit  $q_1$  kun je alleen nog een  $a$ -stap doen. Vanuit  $q_2$  kun je alleen nog een  $b$ -stap doen. Als er een bisimulatie is tussen  $G$  en  $H$  dan moet de knoop  $p$  in  $G$  gerelateerd zijn aan de knopen  $q_1$  en  $q_2$  in  $H$ . Vanuit  $p$  kan je zowel een  $a$ -stap als een  $b$ -stap doen. Vanuit  $q_1$  alleen een  $a$ -stap. Dus er kan geen bisimulatie geconstrueerd worden tussen  $G$  en  $H$ .

**Opgave 25.**

- a. We werken hier met merge zonder communicatie;

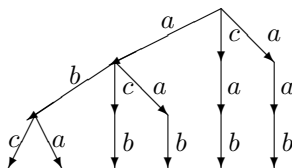
Reken de procesterm van  $(a \cdot b) \parallel (c + a)$  uit tot basisprocesterm (zonder merge ( $\parallel$ ) en left-merge ( $\ll$ )).

- b. Teken de procesgraaf van de basisterm gevonden in 1a.

*Uitwerking van opgave 25:*

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & (a \cdot b) \parallel (c + a) && = \\
 & (a \cdot b) \parallel (c + a) + (c + a) \parallel (a \cdot b) && = \\
 & a \cdot (b \parallel (c + a)) + c \parallel (a \cdot b) + a \parallel (a \cdot b) && = \\
 & a \cdot (b \parallel (c + a) + (c + a) \parallel b) + c \cdot a \cdot b + a \cdot a \cdot b && = \\
 & a \cdot (b \cdot (c + a) + c \parallel b + a \parallel b) + c \cdot a \cdot b + a \cdot a \cdot b && = \\
 & a \cdot (b \cdot (c + a) + c \cdot b + a \cdot b) + c \cdot a \cdot b + a \cdot a \cdot b &&
 \end{aligned}$$

(b)



**Opgave 26.**

- a. Vereenvoudig de procesterm  $(\delta \cdot \delta + a)(b + \delta)$  zoveel mogelijk.  
 b. Is het proces uit 2a deadlock-vrij?

*Uitwerking van opgave 26:*

$$\begin{aligned}
 \text{a.} \quad & (\delta\delta + a)(b + \delta) = \\
 & (\delta + a)(b + \delta) = \\
 & a(b + \delta) = \\
 & ab
 \end{aligned}$$

- b. Ja want  $(\delta\delta + a)(b + \delta)$  is gelijk aan een procesterm zonder  $\delta$ .

**Opgave 27.** (uit tentamen 23 maart 2004)

Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *zonder communicatie*.

- a. Werk de term  $(a + b) \parallel (cd + e)$  uit tot basisprocesterm.  
 b. Bewijs dat de volgende gelijkheid *niet* geldt:  $ac = a(b + c)$ .  
 c. Los op als procesgraaf ( $Y$  is het hulpproces):

$$\begin{aligned}
 X &= aY + b \\
 Y &= cXX
 \end{aligned}$$

Uitwerking van opgave 27:

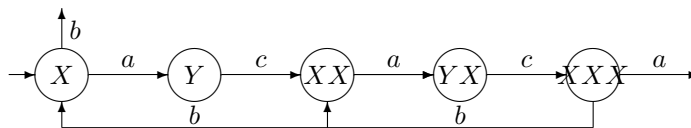
a.

$$\begin{aligned}
 (a + b) \parallel (cd + e) &= \\
 (a + b) \parallel (cd + e) + (cd + e) \parallel (a + b) &= \\
 a \parallel (cd + e) + b \parallel (cd + e) + (cd) \parallel (a + b) + e \parallel (a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d \parallel (a + b)) + e(a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d \parallel (a + b) + (a + b) \parallel d) + e(a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d(a + b) + a \parallel d + b \parallel d) + e(a + b) &= \\
 a(cd + e) + b(cd + e) + c(d(a + b) + ad + bd) + e(a + b) &=
 \end{aligned}$$

b. We laten zien dat de procesgraaf van  $ac$  niet bisimilair is met die van  $a(b + c)$ .

Als we proberen een bisimulatie te construeren, dan moeten we om te beginnen de roots aan elkaar relateren. Vanuit de root kan je in alletwee de grafen alleen een  $a$ -stap doen. Je moet de punten waar je dan in terecht komt ook aan elkaar relateren. Maar dan kan je in de graaf van  $a(b + c)$  een  $b$ -stap doen, terwijl dat in de graaf van  $ac$  niet mogelijk is. Conclusie: de twee grafen zijn niet bisimilair, en de gelijkheid  $ac = a(b + c)$  geldt dus ook niet.

c. De procesgraaf van  $X$ :



We gebruiken het volgende:

$$XX = (aY + b)X = aYX + bX$$

$$YX = cXXX$$

$$XXX = (aY + b)XX = aYXX + bXX$$

**Opgave 28.** (uit tentamen 23 maart 2004)

Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *met communicatie*.

- Werk  $\delta$  zoveel mogelijk weg uit de procesterm  $p = a\delta b + a(b + \delta)c + \delta(a + b)$ .  
Teken ook het  $\delta$ -schone overblijfsel van  $G(p)$  (dat is  $\Delta(G(p))$ ).
- We werken met de verzameling acties  $A = \{a, a', a'', b, c, d, e\}$ .  
De communicatiefunctie  $\gamma$  is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = a''$ .  
Teken  $G(abc \parallel dea')$ .

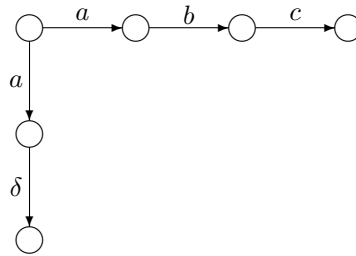
- c. Dit is een vervolg op vraag 6b;  
 we hebben nu bovendien gegeven  $H = \{a, a'\}$ .  
 Teken  $\Delta_H(G(abc \parallel dea'))$ .

*Uitwerking van opgave 28:*

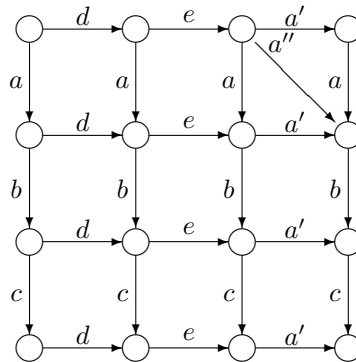
a.

$$\begin{aligned}
 a\delta b + a(b + \delta)c + \delta(a + b) &= \\
 a\delta + abc + \delta &= \\
 a\delta + abc &
 \end{aligned}$$

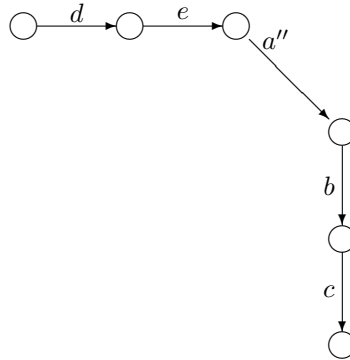
Het  $\delta$ -schone overblijfsel van  $G(p)$ :



- b.  $G(abc \parallel dea')$ :



- c.  $\Delta_H(G(abc \parallel dea'))$ :



**Opgave 29.** (uit hertentamen 29 juni 2004)

Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *zonder communicatie*.

- Werk de term  $(a + bc) \parallel (d + e)$  uit tot basisprocesterm.
- Bewijs dat de volgende gelijkheid *niet* geldt:  $a(b + c) = ab + ac$ .
- Los op als procesgraaf ( $Y$  is het hulproces):

$$\begin{aligned} X &= aYY \\ Y &= bX + c \end{aligned}$$

**Opgave 30.** (uit hertentamen 29 juni 2004)

Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *met communicatie*.

- Werk  $\delta$  zoveel mogelijk weg uit de procesterm  $p = \delta(a+b) + a(\delta+b)c + ab\delta$ .  
Teken ook het  $\delta$ -schone overblijfsel van  $G(p)$  (dat is  $\Delta(G(p))$ ).
- We werken met de verzameling acties  $A = \{a, a', a'', b, c, d\}$ .  
De communicatiefunctie  $\gamma$  is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = a''$ .  
Teken de procesgraaf van  $ab \parallel ca'd$ , dwz. het cartesisch product van  $G(ab)$  en  $G(ca'd)$  met toevoeging van de communicatiepijlen.  
(NB: Er wordt *niet* gevraagd om de term  $ab \parallel ca'd$  uit te werken met de axioma's van de procesalgebra.)
- Dit is een vervolg op vraag 6b;  
we hebben nu bovendien gegeven  $H = \{a, a'\}$ .  
Teken  $\Delta_H(G(ab \parallel ca'd))$ .

**Opgave 31.** Zijn de volgende paren van procestermen gelijk? Zoja, geef een afleiding met de wetten van de BPA, en geef een bisimulatie tussen de bijbehorende procesgrafieën. Zonee, leg uit waarom er geen bisimulatie mogelijk is.

- $(a + a)(b + b)c = abc$ ,

(ii)  $a(b + c) = a(b + c) + ac$ ,

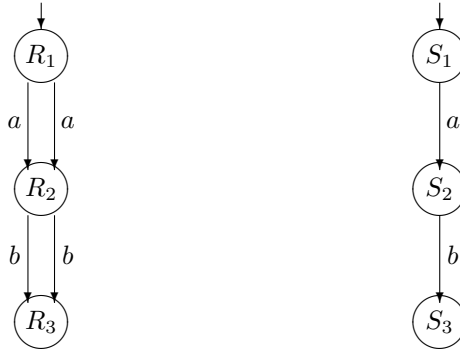
(iii)  $(a + b)(a + b) = a(a + b) + ba + bb$ .

*Uitwerking van opgave 31:*

(i) De gelijkheid  $(a + a)(b + a)c = abc$  is geldig in BPA. Een afleiding:

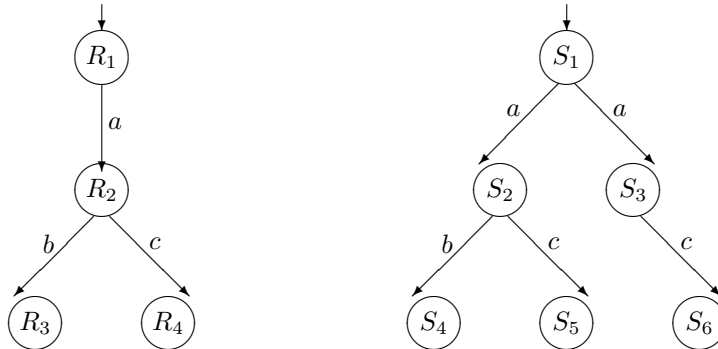
$$\begin{aligned} (a + a)(b + b)c &= (A3) \\ a(b + b)c &= (A3) \\ abc & \end{aligned}$$

De twee bijbehorende procesgrafieën:



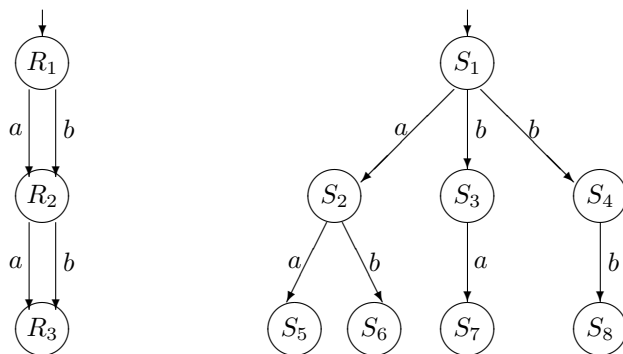
Een bisimulatie tussen deze twee procesgrafieën:  $\{(R_1, S_1), (R_2, S_2), (R_3, S_3)\}$ .  
(Je mag een bisimulatie in een plaatje aangeven.)

(ii) De gelijkheid  $a(b + c) = a(b + c) + ac$  is *niet* geldig in BPA. De twee bijbehorende procesgrafieën zijn:



Er is geen bisimulatie tussen deze procesgrafieën mogelijk. In een bisimulatie zouden in elk geval  $R_1$  en  $S_1$  gerelateerd moeten zijn. Dan zouden  $R_2$  en  $S_3$  ook gerelateerd moeten zijn. Maar in  $R_2$  kan je nog kiezen tussen een  $b$ -stap en een  $c$ -stap, en in  $S_3$  kan je alleen maar een  $c$ -stap doen.

- (iii) De vergelijking  $(a + b)(a + b) = a(a + b) + ba + bb$  is *niet* geldig in BPA. De twee bijbehorende procesgrafieën zijn:



Er is geen bisimulatie tussen deze procesgrafieën mogelijk. In een bisimulatie zouden in elk geval  $R_1$  en  $S_1$  gerelateerd moeten zijn. Dan zou verder  $R_2$  gerelateerd moeten zijn met  $S_3$  (onder andere). Vanuit  $R_2$  kan je zowel een  $a$ -stap als een  $b$ -stap zetten, maar vanuit  $S_3$  is alleen een  $a$ -stap mogelijk. Er bestaat dus geen bisimulatie.

**Opgave 32.**

- (i) Bepaal een oplossing als procesgraaf van  $X$  in de recursieve specificatie:

$$X = aX + bX$$

- (ii) Bepaal een oplossing als procesgraaf van  $X$  in de recursieve specificatie:

$$X = aXX + bX$$

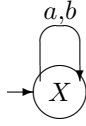
- (iii) Bepaal een oplossing als procesgraaf van  $X$  in de recursieve specificatie:

$$X = aXX + b$$

- (iv) Welke van de drie recursieve processen in deze opgave zijn met elkaar bisimilair? Motiveer je antwoord.

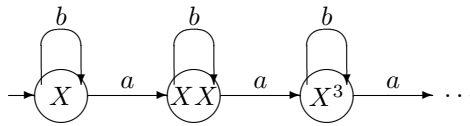
*Uitwerking van opgave 32:*

- (i) Een oplossing als procesgraaf van  $X$  met  $X = aX + bX$ :



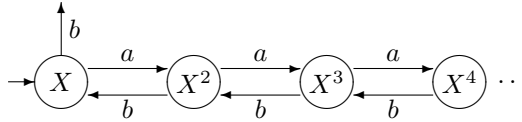
(We gebruiken hier een afkorting: er is een  $a$ -stap van  $X$  naar  $X$  en een  $b$ -stap van  $X$  naar  $X$ .)

- (ii) Een oplossing als procesgraaf van  $X$  met  $X = aXX + bX$ :



We moeten hier  $X^2$  en  $X^3$  zo uitwerken dat we weten wat alle mogelijke eerste acties zijn. Er geldt  $XX = (aXX + bX)X = aX^3 + bX^2$  en  $X^3 = (aXX + bX)XX = aX^4 + bX^3$ ,

- (iii) Een oplossing als procesgraaf voor  $X$  met  $X = aXX + b$ :



Om deze (oneindige) procesgraaf te maken moeten we weer weten wat alle mogelijke eerste acties zijn vanuit bijvoorbeeld  $X^2$ . Er geldt  $X^2 = (aXX + b)X = aX^3 + bX$  en  $X^3 = (aXX + b)XX = aX^4 + bX^3$ .

- (iv) Er is een bisimulatie tussen de procesgrafen in (i) en in (ii): relateer alle knopen in (ii) aan de enige knoop in (i). Tussen de procesgraaf van (iii) en (i) is geen bisimulatie mogelijk omdat je vanuit de wortel in (iii) een  $b$ -stap kunt doen om vervolgens te termineren; vanuit de wortel in (i) kan dat niet. Evenzo is er geen bisimulatie tussen (iii) en (ii).

**Opgave 33.** (uit tentamen 29 juni 2004)

Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *zonder communicatie*.

- Werk met behulp van de axioma's van de procesalgebra de term  $c \parallel (d+e)$  uit tot basisprocesterm.
- Werk ook de term  $(a + bc) \parallel (d + e)$  uit tot basisprocesterm.
- Teken de procesgraaf van de term  $ab \parallel (c + b)$ .

*Uitwerking opgave 33:*

- a. We werken  $c \parallel (d + e)$  uit tot basisprocesterm:

$$\begin{aligned} c \parallel (d + e) &= \\ c \parallel (d + e) + (d + e) \parallel c &= \\ c(d + e) + d \parallel c + e \parallel c &= \\ c(d + e) + dc + ec & \end{aligned}$$

- b. We werken  $(a + bc) \parallel (d + e)$  uit tot basisprocesterm; we gebruiken onderdeel (a):

$$\begin{aligned} (a + bc) \parallel (d + e) &= \\ (a + bc) \parallel (d + e) + (d + e) \parallel (a + bc) &= \\ a \parallel (d + e) + (bc) \parallel (d + e) + d \parallel (a + bc) + e \parallel (a + bc) &= \\ a(d + e) + b(c \parallel (d + e)) + d(a + bc) + e(a + bc) &= \\ a(d + e) + b(c(d + e) + dc + ec) + d(a + bc) + e(a + bc) & \end{aligned}$$

- c. De procesgraaf van  $ab \parallel (c + b)$ :

**Opgave 34.** (uit tentamen 29 juni 2004)

Gegeven is de procesterm  $p = \delta(a + b) + a(\delta + b)c + ab\delta$ .

- Werk  $\delta$  zoveel mogelijk weg uit de procesterm  $p$ .
- Teken de procesgraaf  $G(p)$  van  $p$ .
- Teken het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta(G(p))$  van  $G(p)$ .

*Uitwerking opgave 34:*

- a.

$$\begin{aligned} \delta(a + b) + a(\delta + b)cab\delta &= \\ \delta + abc + ab\delta &= \\ abc + ab\delta & \end{aligned}$$

- b. De procesgraaf  $G(p)$ :

- c. Het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta(G(p))$ :

**Opgave 35.** We werken met de verzameling acties  $A = \{a, a', e, b, c, d\}$ . De communicatiefunctie  $\gamma$  is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = e$ .

- Teken de procesgraaf van  $ab \parallel ca'd$ , dwz. het cartesisch product van  $G(ab)$  en  $G(ca'd)$  met toevoeging van de communicatiepijlen.

(NB: Er wordt *niet* gevraagd om de term  $ab \parallel ca'd$  uit te werken met de axioma's van de procesalgebra.)

- b. We hebben nu bovendien gegeven  $H = \{a, a'\}$ .  
Teken  $\Delta_H(G(ab \parallel ca'd))$ .
- c. Gegeven zijn de processen  $X, Y$ , gedefinieerd met de recursievergelijkingen

$$\begin{aligned} X &= abX \\ Y &= a'Y \end{aligned}$$

Geef een oneindig trace van het proces  $\partial_H(X \parallel Y)$ .

*Uitwerking opgave 35:*

- a. Het cartesisch product van  $G(ab)$  en  $G(ca'd)$ :  
b. De procesgraaf  $\Delta_H(G(ab \parallel ca'd))$ :  
c. Een oneindig trace van  $X \parallel Y$ : *ebebebebeb...*

**Opgave 36.** Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *zonder communicatie*.

- a. Werk met behulp van de axioma's van de procesalgebra de term  $c \parallel (d+e)$  uit tot basisprocesterm.  
b. Werk ook de term  $(a+bc) \parallel (d+e)$  uit tot basisprocesterm.  
c. Teken de procesgraaf van de term  $ab \parallel (c+b)$ .

*Uitwerking opgave 36:*

- (a) We werken  $c \parallel (d+e)$  uit tot basisprocesterm:

$$\begin{aligned} c \parallel (d+e) &= \\ c \llbracket (d+e) + (d+e) \rrbracket c &= \\ c(d+e) + d \llbracket c+e \rrbracket c &= \\ c(d+e) + dc + ec & \end{aligned}$$

- (b) We werken  $(a+bc) \parallel (d+e)$  uit tot basisprocesterm; we gebruiken onderdeel (a):

$$\begin{aligned} (a+bc) \parallel (d+e) &= \\ (a+bc) \llbracket (d+e) + (d+e) \rrbracket (a+bc) &= \\ a \llbracket (d+e) + (bc) \rrbracket (d+e) + d \llbracket (a+bc) + e \rrbracket (a+bc) &= \\ a(d+e) + b(c \parallel (d+e)) + d(a+bc) + e(a+bc) &= \\ a(d+e) + b(c(d+e) + dc + ec) + d(a+bc) + e(a+bc) & \end{aligned}$$

- (c) De procesgraaf van  $ab \parallel (c+b)$ :

**Opgave 37.** Gegeven is de procesterm  $p = \delta(a + b) + a(\delta + b)c + ab\delta$ .

- Werk  $\delta$  zoveel mogelijk weg uit de procesterm  $p$ .
- Teken de procesgraaf  $G(p)$  van  $p$ .
- Teken het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta(G(p))$  van  $G(p)$ .

*Uitwerking opgave 37:*

(a)

$$\begin{aligned} \delta(a + b) + a(\delta + b)cab\delta &= \\ \delta + abc + ab\delta &= \\ abc + ab\delta & \end{aligned}$$

(b) De procesgraaf  $G(p)$ :

(c) Het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta(G(p))$ :

**Opgave 38.** We werken met de verzameling acties  $A = \{a, a', e, b, c, d\}$ . De communicatiefunctie  $\gamma$  is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = e$ .

- Teken de procesgraaf van  $ab \parallel ca'd$ , dwz. het cartesisch product van  $G(ab)$  en  $G(ca'd)$  met toevoeging van de communicatiepijlen.  
(NB: Er wordt *niet* gevraagd om de term  $ab \parallel ca'd$  uit te werken met de axioma's van de procesalgebra.)
- We hebben nu bovendien gegeven  $H = \{a, a'\}$ .  
Teken  $\Delta_H(G(ab \parallel ca'd))$ .
- Gegeven zijn de processen  $X, Y$ , gedefinieerd met de recursievergelijkingen

$$\begin{aligned} X &= abX \\ Y &= a'Y \end{aligned}$$

Geef een oneindig trace van het proces  $\partial_H(X \parallel Y)$ .

*Uitwerking opgave 38:*

- Het cartesisch product van  $G(ab)$  en  $G(ca'd)$ :
- De procesgraaf  $\Delta_H(G(ab \parallel ca'd))$ :
- Een oneindig trace van  $X \parallel Y$ :  $ebebebebe\dots$

**Opgave 39.** We werken in deze opgave in PA (dus zonder communicatie) met de atomaire acties  $a$ ,  $b$ , en  $c$ . Zijn de volgende vergelijkingen geldig? Zo ja, geef een berekening; zo nee, toon aan dat de bijbehorende procesgrafen niet bisimilaair zijn.

- (a)  $a \parallel bc = (a \parallel b)c$
- (b)  $ba \parallel a = (b \parallel a)a + baa$
- (c)  $(a \parallel b) + (a \parallel c) = a \parallel (b + c)$
- (d)  $ab \parallel a = a(a \parallel b)$

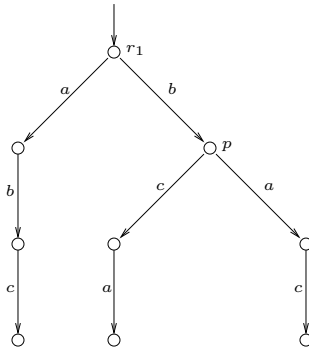
*Uitwerking van opgave 39:*

- (a)  $PA \not\models a \parallel bc = (a \parallel b)c$ .

We reduceren beide gesloten PA-termen tot BPA-termen, en laten zien dat de bijbehorende procesgrafen niet bisimilaair zijn. De reductie van  $a \parallel bc$  tot BPA-term:

$$\begin{aligned}
 a \parallel bc &= a \llbracket bc + bc \rrbracket a \\
 &= abc + b(c \parallel a) \\
 &= abc + b(c \llbracket a + a \rrbracket c) \\
 &= abc + b(ca + ac)
 \end{aligned}$$

De bijbehorende procesgraaf  $g_1$  is getekend in Figuur 1.

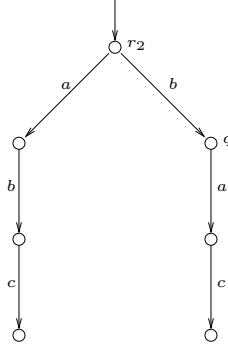


Figuur 1:  $g_1 = G(abc + b(ca + ac))$

De reductie van  $(a \parallel b)c$  tot BPA-term:

$$\begin{aligned}
 (a \parallel b)c &= (a \llbracket b + b \rrbracket a)c \\
 &= (ab + ba)c \\
 &= abc + bac
 \end{aligned}$$

De bijbehorende procesgraaf  $g_2$  is getekend in Figuur 2.



Figuur 2:  $g_2 = G(abc + bac)$

Het is duidelijk dat de procesgrafieën  $g_1$  (Fig. 1) en  $g_2$  (Fig. 2) niet bisimilaire zijn. Immers, stel dat er wel een bisimulatie  $R$  tussen  $g_1$  en  $g_2$  bestaat. Dan geldt dat de wortels  $r_1$  en  $r_2$  van respectievelijk  $g_1$  en  $g_2$   $R$ -gerelateerd zijn, dus  $(r_1, r_2) \in R$ . Omdat er vanuit  $r_1$  een  $b$ -stap mogelijk is naar een knoop die we  $p$  noemen, volgt dat er een knoop  $k$  in  $g_2$  is zodat  $r_2 \xrightarrow{b} k$  en dat  $(p, k) \in R$ . De enige kandidaat voor  $k$  is  $q$ . Echter, vanuit  $p$  is een  $c$ -stap mogelijk, maar vanuit  $q$  niet. Dus  $p$  en  $q$  kunnen niet gerelateerd zijn. Daarmee hebben we laten zien dat er geen bisimulatie tussen  $g_1$  en  $g_2$  kan worden geconstrueerd. Met de volledigheidstelling voor BPA volgt dan  $\text{BPA} \not\vdash abc + b(ca + ac) = abc + bac$  en dus ook dat  $\text{PA} \not\vdash abc + b(ca + ac) = abc + bac$ .

- (b)  $\text{PA} \vdash ba \parallel a = (b \parallel a)a + baa$ .

We werken linker- en rechterkant van de gelijkheid uit tot de BPA-term  $baa + aba$ . Links:

$$\begin{aligned}
 ba \parallel a &= ba \parallel a + a \parallel ba \\
 &= b(a \parallel a) + aba \\
 &= b(a \parallel a + a \parallel a) + aba \\
 &= b(a \parallel a) + aba \\
 &= baa + aba
 \end{aligned}$$

Rechts:

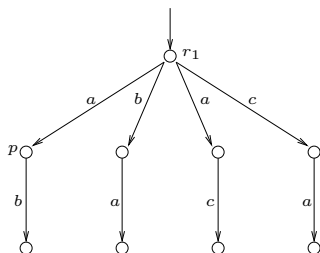
$$\begin{aligned}
& (b \parallel a)a + baa \\
&= (b \parallel a + a \parallel b)a + baa \\
&= (ba + ab)a + baa \\
&= (baa + aba) + baa \\
&= baa + (baa + aba) \\
&= (baa + baa) + aba \\
&= baa + aba
\end{aligned}$$

(c)  $PA \not\sim a \parallel b + a \parallel c = a \parallel (b + c)$ .

We reduceren beide gesloten PA-termen tot BPA-termen, en laten zien dat de bijbehorende procesgrafieën niet bisimilaair zijn. Links:

$$\begin{aligned}
& a \parallel b + a \parallel c \\
&= a \parallel b + b \parallel a + a \parallel c + c \parallel a \\
&= ab + ba + ac + ca
\end{aligned}$$

De bijbehorende procesgraaf  $g_1$  is afgebeeld in Figuur 3.



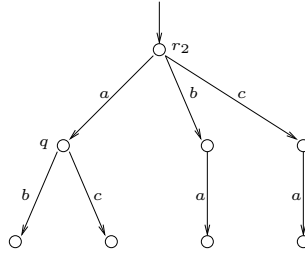
Figuur 3:  $g_1 = G(ab + ba + ac + ca)$

Rechts:

$$\begin{aligned}
& a \parallel (b + c) \\
&= a \parallel (b + c) + (b + c) \parallel a \\
&= a(b + c) + b \parallel a + c \parallel a \\
&= a(b + c) + ba + ca
\end{aligned}$$

De bijbehorende procesgraaf  $g_2$  is afgebeeld in Figuur 4.

De procesgrafieën in Figuren 3 en 4 zijn niet bisimilaair. Als er wel een bisimulatie  $R$  zou bestaan, dan zou  $r_1$   $R$ -gerelateerd zijn aan  $r_2$ . Voorts,



Figuur 4:  $g_2 = G(a(b+c) + ba + ca)$

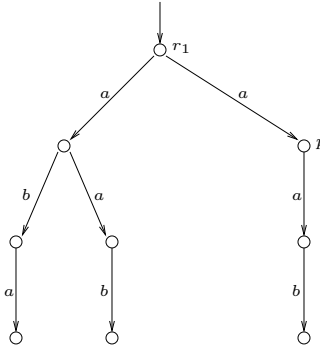
vanwege  $r_1 \xrightarrow{a} p$ , hebben we dat  $(p, q) \in R$  (vanuit  $r_2$  vertrekt maar één  $a$ -pijl, naar  $q$ ). Dat laatste kan echter niet het geval zijn. Immers, vanuit  $p$  is geen  $c$ -stap mogelijk, vanuit  $q$  wel. De aanname dat  $g_1$  en  $g_2$  bisimilair zijn leidt tot een tegenspraak; we concluderen dat ze niet bisimilair zijn. Daarmee is de gevraagde gelijkheid niet afleidbaar in PA.

(d)  $PA \not\vdash ab \parallel a = a(a \parallel b)$ .

We reduceren beide gesloten PA-termen tot BPA-termen, en laten zien dat de bijbehorende procesgrafieën niet bisimilair zijn. Links:

$$\begin{aligned}
 ab \parallel a &= ab \parallel a + a \parallel ab \\
 &= a(b \parallel a) + aab \\
 &= a(b \parallel a + a \parallel b) + aab \\
 &= a(ba + ab) + aab
 \end{aligned}$$

De bijbehorende procesgraaf  $g_1$  is afgebeeld in Figuur 5.

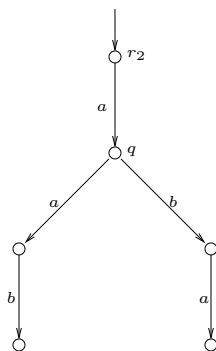


Figuur 5:  $g_1 = G(a(ba + ab) + aab)$

Rechts:

$$\begin{aligned}
 a(a \parallel b) & \\
 &= a(a \parallel b + b \parallel a) \\
 &= a(ab + ba)
 \end{aligned}$$

De bijbehorende procesgraaf  $g_2$  is afgebeeld in Figuur 6.



Figuur 6:  $g_2 = G(a(ab + ba))$

De procesgrafen in Figuren 5 en 6 zijn niet bisimilair. Als er wel een bisimulatie  $R$  zou bestaan, dan zou  $r_1$   $R$ -gerelateerd zijn aan  $r_2$ . Voorts, vanwege  $r_1 \xrightarrow{a} p$ , hebben we dat  $(p, q) \in R$  (vanuit  $r_2$  vertrekt maar één  $a$ -pijl, naar  $q$ ). Dat laatste kan echter niet het geval zijn. Immers, vanuit  $p$  is geen  $b$ -stap mogelijk, vanuit  $q$  wel. De aanname dat  $g_1$  en  $g_2$  bisimilair zijn leidt tot een tegenspraak; we concluderen dat ze niet bisimilair zijn. Daarmee is de gevraagde gelijkheid niet afleidbaar in PA.

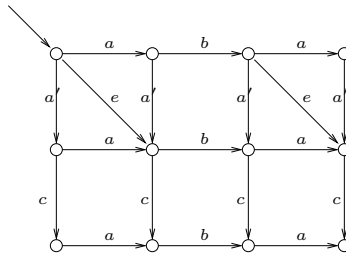
**Opgave 40.** We werken met de verzameling acties  $A = \{a, a', e, b, c\}$ . De communicatiefunctie  $\gamma$  is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = e$ . Verder gebruiken we  $H = \{a, a'\}$ .

- (a) Teken de procesgraaf van  $aba \parallel a'c$ , dwz. het cartesisch product van  $G(aba)$  en  $G(a'c)$  met toevoeging van de communicatiepijlen.
- (b) Teken  $\Delta_H(G(aba \parallel a'c))$ .

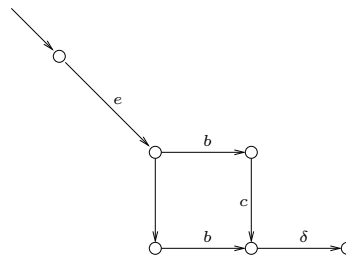
*Uitwerking van opgave 40:*

De verzameling atomaire acties is  $A = \{a, a', e, b, c\}$  en de communicatiefunctie is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = e$ .

- (a) De procesgraaf van  $aba \parallel a'c$  is afgebeeld in Figuur 7.
- (b) Verder is gegeven  $H = \{a, a'\}$ . Het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta_H(G(aba \parallel a'c))$  is afgebeeld in Figuur 8.



Figuur 7:  $G(aba \parallel a'c)$



Figuur 8:  $\Delta_H(G(aba \parallel a'c))$

**Opgave 41.** We werken met de verzameling acties  $A = \{a, a', e, b, c\}$ . De communicatiefunctie  $\gamma$  is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = e$ . Verder gebruiken we  $H = \{a, a'\}$ .

- (a) Teken de procesgraaf van  $X$ , gedefinieerd in de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= aaY \\ Y &= bY + aX + c \end{aligned}$$

- (b) Gegeven zijn de processen  $X, Y$ , gedefinieerd met de recursievergelijkingen

$$\begin{aligned} X &= baX \\ Y &= a'cY \end{aligned}$$

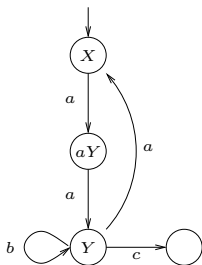
Geef een oneindig trace van het proces  $\Delta_H(X \parallel Y)$ .

*Uitwerking van opgave 41:*

- (a) De procesgraaf van  $X$  gedefinieerd door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= aaY \\ Y &= bY + aX + c \end{aligned}$$

is afgebeeld in Figuur 9.



Figuur 9: De procesgraaf van  $X$  gedefinieerd door  $X = aaY$ ,  $Y = bY + aX + c$ .

(b) Gegeven zijn de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= baX \\ Y &= a'cY \end{aligned}$$

Gevraagd wordt een oneindig trace te geven van  $\partial_H(X \parallel Y)$ . We gaan uit van  $\gamma$  en  $H$  zoals die zijn gedefinieerd in Opgave 1. Uitrekenen van  $\partial_H(X \parallel Y)$  geeft  $be\partial_H(X \parallel cY)$ ; en  $\partial_H(X \parallel cY)$  geeft  $bce\partial_H(cY \parallel X) + c\partial_H(Y \parallel X)$ . Dus, gegeven commutativiteit van  $\parallel$ , kunnen we het proces definiëren met behulp van twee recursievergelijkingen ( $U$  voor het hoofdproces  $\partial_H(X \parallel Y)$  en  $V$  voor het hulproces  $\partial_H(X \parallel cY)$ ):

$$\begin{aligned} U &= beV \\ V &= bceV + cU \end{aligned}$$

Dus, twee voorbeelden van oneindige traces van het proces  $U$  zijn:  $(bec)^\omega$  en  $be(bce)^\omega$ .

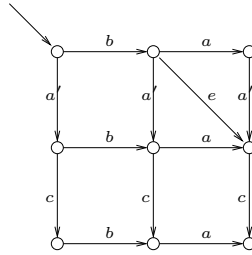
**Opgave 42:**

- (a) Teken de procesgraaf van  $ba \parallel a'c$ , dwz. het cartesisch product van  $G(ba)$  en  $G(a'c)$  met toevoeging van de communicatiepijlen.
- (b) Teken  $\Delta_H(G(ba \parallel a'c))$ .
- (c) Reken met de axioma's van de procesalgebra (ACP) de term

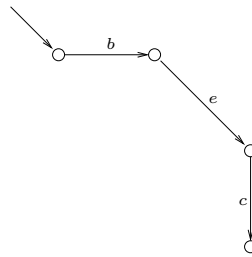
$$\partial_H((a + b) \parallel a'c)$$

uit tot een term in  $BPA_\delta$  en teken de procesgraaf  $\Delta_H(G((a + b) \parallel a'c))$ .

*Uitwerking van opgave 42:*



Figuur 10:  $G(ba \parallel a'c)$



Figuur 11:  $\Delta_H(G(ba \parallel a'c))$

- (a) Deze opgave lijkt erg op Opgave 1(a). De procesgraaf in Figuur 10 is ‘geknipt’ uit die van Figuur 7.  $A$  en  $H$  zijn ook als in die opgave.
- (b) Het  $\delta$ -schone overblijfsel van  $G(ba \parallel a'c)$  is getekend in Figuur 11.
- (c) We reduceren  $\partial_H((a + b) \parallel a'c)$  uit tot basisprocesterm:

$$\begin{aligned}
 & \partial_H((a + b) \parallel a'c) \\
 &= \partial_H((a + b) \parallel a'c + a'c \parallel (a + b) + (a + b) | a'c) \\
 &= \partial_H(a \parallel a'c + b \parallel a'c + a'(c \parallel (a + b)) + a | a'c + b | a'c) \\
 &= \partial_H(aa'c + ba'c + a'(c \parallel (a + b))) + (a | a')c + (b | a')c \\
 &= \partial_H(aa'c) + \partial_H(ba'c) + \partial_H(a'(c \parallel (a + b))) + \partial_H((a | a')c) + \partial_H((b | a')c) \\
 &= \delta a'c + b\delta c + \delta(c \parallel (\delta + b)) + \partial_H(ec) + \partial_H(\delta c) \\
 &= \delta + b\delta + \delta + ec + \delta \\
 &= b\delta + ec
 \end{aligned}$$

**Opgave 43.**

- (a) Teken de procesgraaf van  $X$  gedefinieerd in de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= aX + bY \\ Y &= bY + c \end{aligned}$$

(b) Teken nu de procesgraaf van  $Z$  gedefinieerd in de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} Z &= aZ + bY \\ Y &= bY + c \end{aligned}$$

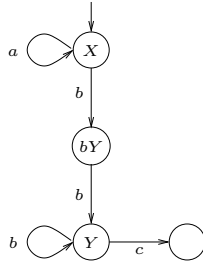
(c) Zijn de in (a) en (b) gevonden procesgrafen bisimilaair? Zo ja, geef een bisimulatie, zo nee, beredeneer waarom niet.

*Uitwerking van opgave 43:*

(a) De procesgraaf van  $X$  gedefinieerd door recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= aX + bY \\ Y &= bY + c \end{aligned}$$

is afgebeeld in Figuur 12.



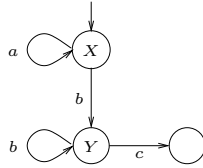
Figuur 12: De procesgraaf van  $X$  gedefinieerd door:  $X = aX + bY$ ,  $Y = bY + c$ .

(b) De procesgraaf van  $Z$  gedefinieerd door:

$$Z = aX + bY$$

met hetzelfde hulpproces  $Y$  als in het vorige item, is afgebeeld in Figuur 13.

(c) De procesgrafen van  $X$  (Fig. 12) en  $Z$  (Fig. 13) zijn duidelijk niet bisimilaair. Een mogelijke trace van  $Z$  is  $bc$ , terwijl je in het proces  $X$  minstens 2  $b$ -stappen moet doen voordat je met een  $c$ -step termineert.



Figuur 13: De procesgraaf van  $Z$  gedefinieerd door:  $Z = aZ + bY$ ,  $Y = bY + c$ .

**Opgave 44.** Deze opgave gaat over PA (dus zonder communicatie). We gebruiken atomaire acties  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , en  $d$ . Zijn de volgende vergelijkingen geldig? Zo ja, geef een afleiding in PA. Zo nee, toon aan dat de bijbehorende grafen niet bisimilair zijn.

- (a)  $a \parallel b + a \parallel c = a \parallel (b + c)$ .
- (b)  $(a + b) \parallel (a + c) = (a + b)(a + c) + (a + c)(a + b)$ .
- (c)  $(ab) \parallel c = a \parallel (cb)$ .
- (d)  $(a + b) \parallel cd = (a \parallel cd) + (b \parallel cd)$ .

*Uitwerking van opgave 44:*

**Opgave 45.** Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie. Ook hier zijn  $a$  en  $b$  atomaire acties.

- (a) Bepaal een oplossing als procesgraaf van de processen  $X$ ,  $Y$ , en  $Z$ :

$$\begin{aligned} X &= aX + bX \\ Y &= aYY + bY \\ Z &= aZ + bZZ \end{aligned}$$

- (b) Welke van de drie recursieve processen  $X$ ,  $Y$ , en  $Z$  in deze opgave zijn met elkaar bisimilair? Motiveer je antwoord.

**Opgave 46.** We gebruiken atomaire acties  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , en  $d$ .

Bepaal een oplossing als procesgraaf van  $X$  in de volgende recursieve specificatie:

$$X = a(bX + cXX) + d$$

**Opgave 47.** We gebruiken atomaire acties  $a$  en  $b$ .

Bepaal een oplossing als procesgraaf van  $Y$  gedefinieerd door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} Y &= aY + bZ \\ Z &= aZ + bYZ \end{aligned}$$

**Opgave 48.** Deze opgave gaat over ACP (met communicatie). We gebruiken atomaire acties  $a$ ,  $a'$ ,  $a^*$ , en  $b$ . De communicatiefunctie is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = a^*$ . Verder is gegeven  $H = \{a, a'\}$ .

- (a) Teken de procesgraaf  $G(ab \parallel a')$ .
- (b) Teken het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta_H(G(ab \parallel a'))$ .
- (c) Bereken  $\partial_H(ab \parallel a')$ .

**Opgave 49.** Deze opgave gaat over ACP (met communicatie). We gebruiken atomaire acties  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ , en  $a^*$ . De communicatiefunctie is gedefinieerd als  $\gamma(a, a') = a^*$ . Verder is gegeven  $H = \{a, a'\}$ .

- (a) Teken de procesgraaf  $G(ab \parallel (a + a'))$ .
- (b) Teken het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta_H(G(ab \parallel (a + a')))$ .
- (c) Bereken  $\partial_H(ab \parallel (a + a'))$ .