uitwerkingen opgaven formele structuren 2007 - 2008 week 1: tellen

Opgave 1.

(a) Gegeven zijn de functies $f, g, h : [0,1] \to [0,1]$.

(i) De functie $f : x \mapsto x^2$ is injectief en surjectief, en dus ook bijectief.

(ii) De functie $g : x \mapsto 4(x - \frac{1}{2})^2$ is niet injectief want $g(0) = g(1) = 1$. De functie g is wel surjectief. Het is geen bijectie.

(iii) De functie

$$h \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{als } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

is niet injectief want $h(0) = h(\frac{1}{2}) = 0$. De functie h is ook niet surjectief want er is geen $x \in [0,1]$ met $h(x) = \frac{1}{2}$. De functie h is geen bijectie.

(b) We definiëren een bijectie $f : [0, \to) \to [0, \to) \cup \{-1\}$. We zien het domein $[0, \to)$ van f als de disjuncte vereniging van $\mathbb{N}$ en $[0, \to) \backslash \mathbb{N}$. We zien het bereik $[0, \to \cup \{-1\}$ van f als de disjuncte vereniging van $\{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ en $[0, \to) \backslash \mathbb{N}$. Het functievoorschrift van f is als volgt:

$$f : x \mapsto \begin{cases} x - 1 & \text{als } x \in \mathbb{N} \\ x & \text{als } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Het eerste deel van de definitie is een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Het tweede deel van de definitie is een bijectie tussen de verzameling $([0, \to) \backslash \mathbb{N})$ en zichzelf.

(c) We definiëren een injectie $g : B \to C$ als volgt: $g : x \mapsto x - 2$. We definiëren een injectie $h : C \to B$ als volgt:

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{als } x \in [-2, -1] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{als } x \in [1, 2) \end{cases}$$

Uit de stelling van Cantor en Bernstein volgt nu dat er een bijectie bestaat tussen B en C, oftewel B en C zijn gelijkmachtig.

In plaats van de stelling van Cantor en Bernstein te gebruiken kun je ook direct een bijectie tussen B en C geven. De functie h hierboven is niet alleen een injectie van C naar B maar zelfs een bijectie tussen B en C.

Opgave 2.

(a) (i) De verzameling van alle rationale getallen tussen 0 en 1 is aftelbaar.

(ii) De verzameling $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ is overaftelbaar.

(iii) De verzameling van alle (eindige) strings over $\{0, 1\}$ is aftelbaar.

(iv) De verzameling van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen is aftelbaar.

Voor elke n geldt dat de verzameling R_n van rijtjes van natuurlijke getallen ter lengte n aftelbaar is. We krijgen de verzameling R van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen door de aftelbare vereniging te nemen van alle R_i, oftewel $R = \cup_{i=0}^{\infty} R_i$. De aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar.

(v) Het interval $[0, 1]$ is (gelijkmachtig met $\mathbb{R}$ en dus) overaftelbaar.

(b)

	$X \cup Y$	$X \backslash Y$	$X \times Y$
X aftelbaar, Y aftelbaar	A	?	A
X overaftelbaar, Y aftelbaar	O	O	O
X overaftelbaar, Y overaftelbaar	O	?	O