

### opgaven formele structuren ‘tellen’

**Opgave 1.** Zij  $A$  een oneindige verzameling en  $B$  een eindige. Dat wil zeggen (zie pagina 6 van het dictaat):

- $\aleph_0 \leq \#A$ ,
- $B = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$  voor een zeker natuurlijk getal  $n$ .

We veronderstellen dat  $A$  en  $B$  disjunct zijn, dus  $A \cap B = \emptyset$ .

Laat zien dat er geldt  $\#(A \cup B) = \#(A)$ .

*Uitwerking van opgave 1:*

We construeren een bijectie tussen  $A$  en  $A \cup B$ . Dat kan als volgt. Om te beginnen bestaat er (omdat er geldt  $\aleph_0 \leq \#A$ ) een injectie  $f$  van de natuurlijke getallen naar  $A$ :

$$\begin{array}{l} 0 \mapsto a_0 \\ 1 \mapsto a_1 \\ 2 \mapsto a_2 \\ \vdots \end{array}$$

We construeren nu een bijectie tussen  $A$  en  $A \cup B$  in drie delen.

Ten eerste koppelen we de elementen van  $B$ , dus  $b_0, \dots, b_{n-1}$ , aan de elementen  $a_0, \dots, a_{n-1}$ :

$$\begin{array}{l} b_0 \leftrightarrow a_0 \\ b_1 \leftrightarrow a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \leftrightarrow a_{n-1} \end{array}$$

Ten tweede gebruiken we de opschuiftruc als bij het Hilberthotel: we koppelen de elementen  $a_0, a_1, a_2, \dots$  aan de elementen  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ :

$$\begin{array}{l} a_0 \leftrightarrow a_n \\ a_1 \leftrightarrow a_{n+1} \\ a_2 \leftrightarrow a_{n+2} \\ \vdots \end{array}$$

En tenslotte koppelen we alle elementen van  $A$  die niet in het beeld van de injectie  $f$  voorkomen, dus die hierboven niet als  $a_i$  figureren, aan zichzelf:

$$a \leftrightarrow a$$

**Opgave 2.** Dit is opgave 3.3.5 uit het dictaat, maar een beetje aangepast.  
Gegeven is het alfabet  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

- (a) Laat zien dat er een bijectie is tussen de natuurlijke getallen en  $\Sigma^*$  door de elementen van  $\Sigma^*$  op te sommen (als een oneindige lijst).

Je kan dan concluderen dat er geldt  $\#(\Sigma^*) = \aleph_0$ .

- (b) De reguliere expressies over  $\Sigma$  zijn als volgt gedefinieerd (zie Sectie 3.2):

(a)  $\emptyset$ ,  $\lambda$ ,  $0$ , en  $1$  zijn reguliere expressies,

(b) als  $r_1$  en  $r_2$  reguliere expressies zijn, dan zijn  $r_1 + r_2$ ,  $r_1 \cdot r_2$ , en  $r^*$  het ook.

Laat zien dat er een bijectie is tussen de natuurlijke getallen en de reguliere expressies over  $\Sigma$  door de reguliere expressies over  $\Sigma$  op te sommen.

Je kan dan concluderen dat er  $\aleph_0$  veel reguliere expressies over  $\Sigma$  zijn.

- (c) De verzameling van talen over  $\Sigma$  is  $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ .

Gebruik de stelling van Cantor (die staat niet in het dictaat) om te berekenen dat er meer talen dan reguliere expressies zijn. Concludeer dat er talen zijn die niet door een reguliere expressie worden aangeduid.

*Uitwerking van opgave 2:*

- (a) We sommen alle elementen van  $\Sigma^*$  op: eerst de strings met één symbool, dan die met twee, enzovoorts:

$\lambda$   
0  
1  
00  
01  
10  
11  
000  
001  
⋮

- (b) We sommen alle reguliere expressies over  $\Sigma$  op door eerst de reguliere expressies bestaande uit één symbool te geven, dan die bestaande uit twee

symbolen, enzovoorts:

$$\begin{aligned} & \emptyset \\ & \lambda \\ & 0 \\ & 1 \\ & \emptyset^* \\ & \lambda^* \\ & 0^* \\ & 1^* \\ & \emptyset + \emptyset \\ & \emptyset + \lambda \\ & \emptyset + 0 \\ & \emptyset + 1 \\ & \lambda + \emptyset \\ & \vdots \\ & \emptyset \cdot \emptyset \\ & \emptyset \cdot \lambda \\ & \vdots \end{aligned}$$

- (c) Uit onderdeel (a) volgt dat er geldt  $\#\Sigma^* = \aleph_0$ . Uit onderdeel (b) volgt dat er ook geldt  $\#\text{RE}(\Sigma) = \aleph_0$ ; hier geven we de verzameling reguliere expressies over  $\Sigma$  aan met  $\text{RE}(\Sigma)$ . Dus:  $\#\text{RE}(\Sigma) = \#\Sigma^*$ .

Volgens de stelling van Cantor geldt er  $\#(\Sigma^*) < \#(\mathcal{P}(\Sigma^*))$ . Dus nu hebben we:

$$\#\text{RE}(\Sigma) = \#\Sigma^* < \#(\mathcal{P}(\Sigma^*))$$

dus  $\#\text{RE}(\Sigma) < \#(\mathcal{P}(\Sigma^*))$ .

Dat betekent dat er echt meer talen dan reguliere expressies over  $\Sigma$  zijn. Dat betekent dat er talen over  $\Sigma$  zijn die niet aangeduid worden door een reguliere expressie (er zijn zelfs oneindig veel van zulke talen).

Hier geven we dus geen concreet voorbeeld van een taal die niet door een reguliere expressie aangeduid wordt; we laten alleen zien dat zulke talen bestaan.

### Opgave 3.

- (a) Geef een aftelling van de gehele getallen  $Z$ ; hieruit volgt dat  $\#N = \#Z$ .
- (b) Geef een injectie van  $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$  naar de rijtjes van 0'en en 1'en ter lengte drie.

*Uitwerking van opgave 3:*

(a) Een aftelling van  $Z$ :

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 0 \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto -1 \\ 3 &\mapsto 2 \\ 4 &\mapsto -2 \\ 5 &\mapsto 3 \\ 6 &\mapsto -3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

(b)  $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ .

We definiëren een functie  $f$  van  $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$  naar de rijtjes van 0'en en 1'en ter lengte drie als volgt:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= 000 \\ f(\{a\}) &= 100 \\ f(\{b\}) &= 010 \\ f(\{c\}) &= 001 \\ f(\{a, b\}) &= 110 \\ f(\{a, c\}) &= 101 \\ f(\{b, c\}) &= 011 \\ f(\{a, b, c\}) &= 111 \end{aligned}$$

Dit is een injectie want twee verschillende verzamelingen worden op verschillende rijtjes afgebeeld.

Het idee is: het eerste element van het rijtje geeft aan of de  $a$  niet (0) of wel (1) in de deelverzameling zit, het tweede element van het rijtje geeft aan of de  $b$  niet (0) of wel (1) in de deelverzameling zit, en het derde element van het rijtje geeft aan of de  $c$  niet (0) of wel (1) in de deelverzameling zit.

**Opgave 4.** (uit tentamen 30 mei 2000)

- (a) Geef een aftelling (d.w.z. een bijectie met de natuurlijke getallen) van de eindige strings over het alfabet  $\{0, 1\}$ . Specificeer in elk geval de eerste tien elementen.
- (b) Zijn de oneindige rijtjes over  $\{0, 1\}$  ook aftelbaar?  
(Ja of nee als antwoord volstaat).

*Uitwerking van opgave 4:*

- (a)  $\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots$
- (b) Nee.

**Opgave 5.** (uit hertentamen 17 augustus 2000)

- (a) De machtsverzameling van een verzameling van  $A$  wordt genoteerd als  $\mathcal{P}(A)$ . Laat zien dat er geldt  $\mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathbf{2}^A$ .
- (b) Bewijs dat de vereniging van twee disjuncte aftelbare verzamelingen weer aftelbaar is.
- (c) Geef een voorbeeld van een oneindige verzameling die niet aftelbaar is.

*Uitwerking van opgave 5:*

- (a) We definiëren een afbeelding  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathbf{2}^A$  als volgt:

$$f(B)(a) = \begin{cases} 0 & \text{als } a \notin B \\ 1 & \text{als } a \in B \end{cases}$$

Hier geldt:  $B \subseteq A$ , dus  $B$  is een deelverzameling van  $A$ , en  $a \in A$ , dus  $a$  is een element van  $A$ .

- De afbeelding  $f$  is welgedefinieerd:  
Voor elke  $B \subseteq A$  geldt dat  $f(B)$  een functie is van  $A$  naar  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ .
- De afbeelding  $f$  is een injectie:  
Stel dat  $B, C \subseteq A$  met  $B \neq C$ . Zeg dat er een element  $b \in B$  is met  $b \notin C$ . Dan geldt:  $f(B)(b) = 1$  en  $f(C)(b) = 0$ , dus  $f(B) \neq f(C)$ .
- De afbeelding  $f$  is een surjectie:  
Neem een willekeurige  $g \in \mathbf{2}^A$ , dus  $g : A \rightarrow \{0, 1\}$ . Definieer een verzameling  $B_g$  als volgt:

$$B_g = \{a \in A \mid g(a) = 1\}.$$

Dan geldt:  $B_g \subseteq A$ , dus  $B_g$  is een deelverzameling van  $A$ . Verder:  $f(B_g) = g$  want er geldt:  $f(B_g)(a) = 0$  precies dan als  $a \notin B_g$ , dus precies dan als  $g(a) = 0$ , en ten tweede  $f(B_g)(a) = 1$  precies dan als  $a \in B_g$ , dus precies dan als  $g(a) = 1$ .

- (b) Het idee is om de twee verzamelingen om en om te gaan aftellen.

Stel we hebben twee disjuncte aftelbare verzamelingen  $A$  en  $B$ . Er is dus een bijectie tussen  $\mathbb{N}$  en  $A$ :

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ A : & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \end{array}$$

en een bijectie tussen  $\mathbb{N}$  en  $B$ :

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ B : & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \dots \end{array}$$

We maken van deze twee aftellingen een aftelling van  $A \cup B$ :

$$\begin{array}{rcccccccc} \mathbb{N} : & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ A \cup B : & & a_0 & b_0 & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \end{array}$$

Omdat  $A$  en  $B$  disjunct zijn, komt er op de tweede regel geen enkel element meer dan één keer voor.

- (c) De verzameling reële getallen  $\mathbb{R}$  is niet aftelbaar (maar overaftelbaar).

**Opgave 6.** (uit tentamen 30 maart 2001)

- (a) Geef een bijectie tussen de verzameling natuurlijke getallen en de verzameling  $M$  die bestaat uit alle machten van 2 en alle machten van 3. (Hier wordt dus een aftelling van  $M$  gevraagd.)
- (b) Gegeven is een bijectie  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .  
Geef een bijectie  $g : \mathbb{N} \rightarrow \{b_0, \dots, b_k\} \cup A$ .  
Hier geldt voor elke  $i \in \{0, \dots, k\}$ :  $b_i \notin A$ .
- (c) Geef van de volgende verzamelingen aan of ze aftelbaar of overaftelbaar zijn (het antwoord volstaat):
- (i)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,
  - (ii)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,
  - (iii) alle eindige rijtjes nullen en enen.

*Uitwerking van opgave 6:*

- (a) Een aftelling van  $M$ :  $0, 1, 2^2, 2^3, 3^2, 3^3, \dots$
- (b) We geven een aftelling van  $\{b_1, \dots, b_k\} \cup A$ :  $b_0, \dots, b_k, a_0, a_1, a_2, \dots$  waarbij  $a_0, a_1, a_2, \dots$  de aftelling behorend bij de bijectie  $f$  is.
- (c) Aftelbaar, overaftelbaar, aftelbaar.

**Opgave 7.** (uit hertentamen 17 augustus 2001)

- (a) Bewijs dat de som van een rationaal en een irrationaal getal irrationaal is.
- (b) Geef een injectie van de verzameling  $\mathbb{Q}$  in de verzameling  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . (Hint: gebruik (a).)
- (c) Kun je ook een injectie van  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{Q}$  maken? Zo ja, doe dat, zo nee, geef aan waarom het niet kan.

*Uitwerking van opgave 7:*

- (a) Bekijk een willekeurig rationaal getal  $r$  en een willekeurig irrationaal getal  $i$ . Stel dat  $r + i \in \mathbb{Q}$ . Dan geldt ook  $i \in \mathbb{Q}$  want  $\mathbb{Q}$  is gesloten onder aftrekken. Tegenspraak, dus  $r + i \in \mathbb{R}$ .
- (b) Een injectie van  $\mathbb{Q}$  naar  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  is:  $q \mapsto \pi + q$ . Het getal  $\pi$  is irrationaal, dus  $\pi = q$  ook voor elke  $q \in \mathbb{Q}$ .
- (c) Nee, want  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  is overaftelbaar en  $\mathbb{Q}$  is aftelbaar.

**Opgave 8.** (uit tentamen 5 juni 2002)

- (a) Laat zien dat de verzamelingen  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  en  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$  evenveel elementen bezitten door het aangeven van een bijectie.
- (b) Laat zien dat er evenveel deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$  zijn als oneindige 01-rijen door het aangeven van een bijectie tussen  $\wp(\mathbb{N})$  en  $2^{\mathbb{N}}$ . (Welke verzameling correspondeert met de rij 0000...? Welke met 010101...?)
- (c) Welke van de genoemde verzamelingen  $A, B, \wp(\mathbb{N}), 2^{\mathbb{N}}$  zijn aftelbaar?

*Uitwerking van opgave 8:*

- (a) De functie  $f : A \rightarrow B$  met  $x \mapsto 2x$  is een bijectie.  
 $f$  is een injectie want uit  $x \neq y$  volgt  $2x \neq 2y$ .  
 $f$  is een surjectie: kies  $y \in B$ . Dan geldt  $f(\frac{y}{2}) = y$ .
- (b) We definiëren een functie  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  als volgt:

$$\begin{aligned} f(A)(n) &= 0 && \text{als } n \notin A \\ f(A)(n) &= 1 && \text{als } n \in A \end{aligned}$$

De functie  $f$  is welgedefinieerd:

een deelverzameling van  $\mathbb{N}$  wordt afgebeeld op een functie van  $\mathbb{N}$  naar  $\{0, 1\}$ .

De functie  $f$  is een injectie:

Stel  $A \neq A'$ , zeg dat  $n \in A$  maar  $n \notin A'$ . Dan geldt  $f(A)(n) = 1$  en  $f(A')(n) = 0$ , dus  $f(A) \neq f(A')$ . De functie  $f$  is een surjectie:

Kies een  $h \in 2^{\mathbb{N}}$ , dat wil zeggen  $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ . We definiëren de verzameling  $A$  als volgt:  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid h(n) = 1\}$ . Dan:  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Nu laten we zien:  $f(A) = h$ .

Kies een  $n \in \mathbb{N}$ . Als  $n \in A$ , dan geldt:  $f(A)(n) = 1$  en  $h(n) = 1$ , dus  $f(A)(n) = h(n)$ . Als  $n \notin A$ , dan geldt:  $f(A)(n) = 0$  en  $h(n) = 0$ , dus  $f(A)(n) = h(n)$ . Dus voor alle  $n \in \mathbb{N}$  geldt  $f(A)(n) = h(n)$ , dus  $f(A) = h$ .

- (c) Geen een:  $A$  en  $B$  zijn gelijkmachtig met  $\mathbb{R}$ ,  $2^{\mathbb{N}}$  is niet aftelbaar volgens het diagonaalargument van Cantor (zie dictaat), en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  is weer gelijkmachting met  $2^{\mathbb{N}}$ .

**Opgave 9.** (uit hertentamen 16 augustus 2002)

- (a) Laat zien dat de verzameling  $Z$  van gehele getallen aftelbaar is door het geven van een aftelling (d.w.z. een bijectie van  $\mathbb{N}$  naar  $Z$ .)
- (b)  $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$  en  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$ .
  - (i) Geef een injectie van  $A$  naar  $B$ .
  - (ii) Geef een injectie van  $B$  naar  $A$ .
  - (iii) Geldt  $\#A = \#B$ ? Motiveer uw antwoord.
- (c) Noem drie verschillende aftelbare verzamelingen.

*Uitwerking van opgave 9:*

- (a) Een aftelling van  $\mathbb{Z}$  is als volgt:  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$
- (b) Een injectie van  $A$  naar  $B$ :  $f : A \rightarrow B$  met  $x \mapsto x + 0,5$ .  
Een injectie van  $B$  naar  $A$ :  $g : B \rightarrow A$  met  $y \mapsto y \div 2$ .  
Hieruit volgt dan  $\#A \leq \#B$  and  $\#B \leq \#A$ . Met de stelling van Cantor en Bernstein volgt dan  $\#A = \#B$ .
- (c)  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , en  $\mathbb{Q}$ .

**Opgave 10.** (uit tentamen 26 maart 2003)

- (a) Gegeven zijn de verzamelingen reële getallen  $A = [0, 1]$  en  $B = [3, 5]$ .  
Geef een functie van  $A \rightarrow B$  die
  - (i) een injectie maar geen surjectie is,
  - (ii) een bijectie is,
  - (iii) een surjectie, maar geen injectie is,
  - (iv) geen surjectie en geen injectie is.
- (b) Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar?  
(Alleen het antwoord volstaat.)
  - (i) de verzameling van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen,
  - (ii) de verzameling van alle functies van de natuurlijke getallen naar de verzameling  $\{0, 1\}$ ,
  - (iii) de verzameling van alle eindige rijtjes reële getallen,
  - (iv) de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van de rationale getallen.

*Uitwerking van opgave 10:*

- a. (i)  $x \mapsto x + 3$   
(ii)  $x \mapsto 2x + 3$   
(iii)  $x \mapsto 2(2x - 1)^2 + 3$   
(iv)  $x \mapsto 3$
- b. (i) aftelbaar  
(ii) overaftelbaar  
(iii) overaftelbaar  
(iv) aftelbaar

**Opgave 11.** (uit tentamen 15 augustus 2003)

(a) Gegeven zijn drie functies:

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1] && \text{met voorschrift } x \mapsto x^2 \\ g : [-2, 2] &\rightarrow [0, 2] && \text{met voorschrift } x \mapsto |x| \\ h : [-3, 3] &\rightarrow [-4, 4] && \text{met voorschrift } x \mapsto x \end{aligned}$$

Geef voor elke van deze functies aan of hij injectief en/of surjectief is. Geef voor elk van de gevallen waarin het antwoord negatief is een tegenbeeld waaruit dat blijkt.

- (b) Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar (het antwoord alleen volstaat):
- (i) De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van de rationale getallen.  
(ii) De verzameling van alle functies van de verzameling  $\{0, 1\}$  naar de natuurlijke getallen.  
(iii) De verzameling van alle reële getallen.  
(iv) De verzameling van alle irrationale getallen (dus alle reële getallen die niet rationaal zijn).

*Uitwerking van opgave 11:*

- a. De functie  $f$  is niet injectief want  $f(-1) = f(1) = 1$ . De functie  $f$  is niet surjectief want er is geen  $x \in [-1, 1]$  met  $f(x) = x^2 = -1$ .  
De functie  $g$  is niet injectief want  $g(-1) = g(1) = 1$ . De functie  $g$  is wel surjectief.  
De functie  $h$  is injectief. De functie  $h$  is niet surjectief want er is geen  $x \in [-3, 3]$  met  $h(x) = x = 4$ .
- b. (i) aftelbaar  
(ii) aftelbaar  
(iii) overaftelbaar  
(iv) overaftelbaar

**Opgave 12.** (uit tentamen 23 maart 2004)

- (a) Gegeven zijn drie functies van  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  door:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \\g(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\h(x) &= \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijjectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB:  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

- b. Gegeven zijn de verzamelingen

$$\begin{aligned}A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \\B &= \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq -3\}\end{aligned}$$

Geef een bijctie tussen  $A$  en  $B$  en leg uit waarom het een bijctie is.

- c. Zij  $P$  een aftelbare verzameling en  $Q$  een overaftelbare verzameling. Beargumenteer dat  $Q \setminus P = \{x \mid x \in Q \text{ en } x \notin P\}$  overaftelbaar is.
- d. Geef drie verschillende overaftelbare verzamelingen.

*Uitwerking van opgave 12:*

- (a) De functie  $f$  is injectief, surjectief, en bijjectief.  
De functie  $g$  is niet injectief want  $g(0) = g(1)$ . De functie  $g$  is ook niet surjectief want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $g(x) = 1$ . De functie  $g$  is dus niet bijjectief.  
De functie  $h$  is injectief maar niet surjectief want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $h(x) = 1$ . De functie  $h$  is dus ook niet bijjectief.
- (b) De afbeelding  $x \mapsto 2x - 7$  is een bijctie. Het is een injectie want als  $2x - 7 = 2y - 7$  dan volgt  $x = y$ . Het is ook een surjectie want  $\frac{y+7}{2}$  wordt afgebeeld op  $y$ , en zit in het interval  $[1, 2]$ .
- (c) Stel dat  $Q \setminus P$  aftelbaar is, en stel dat  $a_0, a_1, a_2$  er een aftelling van is. Omdat  $P$  aftelbaar is, is er een aftelling van  $P$ , zeg  $p_0, p_1, p_2, \dots$ . Van deze twee aftellingen kunnen we een aftelling van  $Q \setminus P \cup P = Q$  maken:  $a_0, p_0, a_1, p_1, a_2, p_2, \dots$ . Tegenspraak, want  $Q$  is overaftelbaar. Dus de veronderstelling dat  $Q \setminus P$  aftelbaar is is niet juist.
- (d)  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , de oneindige rijtjes 0'en en 1'en.

**Opgave 13.** (uit hertentamen 29 juni 2004)

- (a) Gegeven zijn drie functies  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  door:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x} \\g(x) &= |x - \frac{1}{2}| \\h(x) &= 0\end{aligned}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijjectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB:  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

- b. Gegeven zijn twee aftelbaar oneindige verzamelingen  $A$  en  $B$  waarvoor geldt  $A \cap B = \emptyset$ . Bewijs dat  $A \cup B$  aftelbaar is.
- c. Geef twee verschillende aftelbaar oneindige verzamelingen.
- d. Geef twee verschillende overaftelbare verzamelingen.

*Uitwerking van opgave 13:*

- (a) De functie  $f$  is injectief, surjectief, en dus ook bijjectief.

De functie  $g$  is niet injectief want  $g(0) = g(1)$ . De functie  $g$  is ook niet surjectief want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $g(x) = 1$ . De functie  $g$  is dus ook niet bijjectief.

De functie  $h$  is niet injectief ( $h(0) = h(1)$ ) en ook niet surjectief (1 zit niet in het beeld) en dus ook niet bijjectief.

- (b) Er is een aftelling van  $A$ , zeg  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , en er is een aftelling van  $B$ , zeg  $b_0, b_1, b_2, \dots$ . Van deze twee aftellingen maken we een aftelling van  $A \cup B$ :  $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$

- (c)  $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ .

- (d)  $\mathbb{R}$ , de oneindige rijtjes 0'en en 1'en.

**Opgave 14.**

- a. Gegeven zijn drie functies van  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  door:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 \\g(x) &= (x - \frac{1}{2})^2 \\h(x) &= 1\end{aligned}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijjectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB:  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

b. Gegeven zijn de verzamelingen

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\} \end{aligned}$$

Geef een bijectie tussen  $A$  en  $B$  en leg uit waarom het een bijectie is.

c. Gebruik de stelling van Cantor-Bernstein om te laten zien dat de volgende verzamelingen gelijkmachtig zijn:

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\} \end{aligned}$$

d. Geef een aftelling van de verzameling  $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$ .

(Je mag de aftelling als tekening geven.)

*Uitwerking van opgave 14:*

a. De functie  $f$  is injectief, surjectief, en dus ook bijectief.

De functie  $g$  is niet injectief want  $g(0) = g(1) = \frac{1}{4}$ . De functie  $g$  is ook niet surjectief want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $g(x) = 1$ . De functie  $g$  is dus ook niet bijectief.

De functie  $h$  is niet injectief want  $h(0) = h(1) = 1$ . De functie  $h$  is ook niet surjectief want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $h(x) = 0$ .

b. De functie  $f : A \rightarrow B$  gedefinieerd door  $f(x) = 8x - 3$  is een bijectie. Het is een injectie want uit  $8x - 3 = 8x' - 3$  volgt dat  $x = x'$ . Het is ook een surjectie want  $\frac{y+3}{8}$  wordt afgebeeld door  $f$  op  $y$ , en zit in het interval  $[0, 1]$ .

c. Een injectie  $f : (-1, 1) \rightarrow [-2, 2]$  is  $f(x) = x$ . Een injectie  $g : [-2, 2] \rightarrow (-1, 1)$  is  $g(x) = \frac{1}{4}x$ . Met de stelling van Cantor en Bernstein volgt dan dat  $(-1, 1)$  en  $[-2, 2]$  gelijkmachtig zijn, ofwel  $\#(-1, 1) = \#[-2, 2]$ .

d. Een aftelling van de verzameling  $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$  is:

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2), \dots$$

### Opgave 15.

(a) Gegeven zijn de volgende functies van  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$g(x) = \frac{1}{4}(x - 1)^2$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{als } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB:  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

- (b) Geef een bijectie tussen de verzamelingen  $A = [0, 1]$  en  $B = [0, 1] \cup (3, 5]$ .
- (c) Welke van de volgende beweringen zijn *waar* voor alle aftelbare verzamelingen  $A, B$ , en alle overaftelbare verzamelingen  $C, D$ ? Geef voor de beweringen die niet waar zijn een tegenvoorbeeld.
- (i)  $A \cup B$  is aftelbaar.
  - (ii)  $A \cup C$  is aftelbaar.
  - (iii)  $C \setminus A$  is overaftelbaar.
  - (iv)  $C \setminus D$  is overaftelbaar.

*Uitwerking van opgave 15:*

- a. De functie  $f$  is niet injectief, want  $f(0) = f(1) = 1$ . De functie  $f$  is wel surjectief. De functie  $f$  is geen bijectie.

De functie  $g$  is een injectie. De functie  $g$  is geen surjectie, want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $g(x) = 1$ . De functie  $g$  is geen bijectie.

De functie  $h$  is geen injectie, want  $h(0) = h(\frac{1}{4}) = 0$ . De functie  $h$  is ook geen surjectie, want er is geen  $x \in [0, 1]$  met  $h(x) = \frac{1}{2}$ . De functie  $g$  is geen bijectie.

- b. We definiëren  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup (3, 5]$  als volgt:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x + 1 & \text{als } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

De functie  $f$  is een bijectie.

c.

- (i) waar

Stel  $A$  en  $B$  zijn aftelbaar oneindig. Dan is er een aftelling van  $A$ :

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

en een aftelling van  $B$ :

$$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$$

We kunnen deze aftellingen samenvoegen tot een aftelling van  $A \cup B$ :

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$$

Dus  $A \cup B$  is aftelbaar oneindig.

- (ii) niet waar

$\mathbb{N}$  is aftelbaar oneindig,  $\mathbb{R}$  is overaftelbaar, en  $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$  is niet aftelbaar.

- (iii) waar  
 Omdat  $A$  aftelbaar oneindig is, is er een aftelling  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  van  $A$ . Stel dat  $C \setminus A$  aftelbaar is. Dan is er een aftelling  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$  van  $C \setminus A$ . We kunnen de aftelling van  $A$  en de (vermeende) aftelling van  $C \setminus A$  samenvoegen:  $a_0, x_0, a_1, x_1, a_2, x_2, a_3, x_3, \dots$ . Dit is dan een aftelling van  $C$ . Dat is een tegenspraak met het gegeven dat  $C$  overaftelbaar is. Conclusie:  $C \setminus A$  is niet aftelbaar, maar overaftelbaar.
- (iv) niet waar  
 $\mathbb{R}$  is overaftelbaar, maar  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$  is niet overaftelbaar.

### Opgave 16

- (a) We definiëren  $G = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } n^2 > 50\}$ .
- Geef een bijectie  $f : \mathbb{N} \rightarrow G$ .
  - Geef een bijectie  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ .
  - Geef een bijectie  $k : \mathbb{Z} \rightarrow G$ .
- (b) Geef twee oneindige verzamelingen die niet gelijkmachtig zijn.
- (c) Bewijs dat de intervallen  $[3, 5]$  en  $(0, 4)$  gelijkmachtig zijn.  
 NB:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  en  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .

*Uitwerking van opgave 16:*

a.

- We geven een aftelling van  $G$ :  $8^2, 9^2, 10^2, \dots$
- We geven een aftelling van  $\mathbb{Z}$ :  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$
- De volgende afbeelding:

$$\begin{array}{rcl}
 0 & \mapsto & 8^2 \\
 1 & \mapsto & 9^2 \\
 -1 & \mapsto & 10^2 \\
 2 & \mapsto & 11^2 \\
 -2 & \mapsto & 12^2 \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

is een bijectie tussen  $\mathbb{Z}$  en  $G$ .

- b. De verzameling natuurlijke getallen  $\mathbb{N}$  en de verzameling reële getallen  $\mathbb{R}$  zijn alletwee oneindig maar ze zijn niet gelijkmachtig:  $\#\mathbb{N} = \aleph_0 < \#\mathbb{R}$ . De verzameling  $\mathbb{N}$  is aftelbaar oneindig, en  $\mathbb{R}$  is overaftelbaar.

c. De afbeelding  $f : [3, 5] \rightarrow (0, 4)$  gedefinieerd door

$$f(x) = x - 2$$

is een injectie. De afbeelding  $g : (0, 4) \rightarrow [3, 5]$  gedefinieerd door

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

is ook een injectie. Met de stelling van Cantor en Bernstein volgt dat er een bijectie is tussen  $[3, 5]$  en  $(0, 4)$ . Ofwel:  $\#[3, 5] = \#(0, 4)$ .

**Opgave 17.** (uit tentamen 2006 03 31)

- (1) Geef van elk van de volgende functies in  $[0, 1] \rightarrow [3, 5]$  aan of zij injectief, surjectief en/of bijectief is. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.
  - (i)  $x \mapsto 4$
  - (ii)  $x \mapsto 4 - x$
  - (iii)  $x \mapsto 2x + 3$
- (2) Laat zien dat de intervallen  $A = (0, 1]$  en  $B = [1, 3)$  gelijkmachtig zijn.
- (3) Geef van de volgende verzamelingen aan of ze aftelbaar of overaftelbaar oneindig zijn (het antwoord alleen volstaat):
  - (i) de verzameling van oneindige rijtjes over  $\{0, 1\}$ ;
  - (ii) de verzameling  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  van paren van natuurlijke getallen;
  - (iii) de verzameling  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  van irrationale getallen.

*Uitwerking van opgave 17:*

1. Gegeven zijn functies  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [3, 5]$ .
  - (a) De functie  $f$  gegeven door  $f(x) = 4$  is niet injectief, immers, bijv.,  $f(0) = f(1) = 4$ ;  $f$  is ook niet surjectief, er is bijv. geen  $x \in [0, 1]$  zodat  $f(x) = 3$ . Dus  $f$  is niet bijectief.
  - (b) De functie  $g$  gegeven door  $g(x) = 4 - x$  is injectief, maar niet surjectief, er is bijv. geen  $x \in [0, 1]$  zodat  $g(x) = 5$ . Dus  $g$  is niet bijectief.
  - (c) De functie  $h$  gegeven door  $h(x) = 2x + 3$  is zowel injectief als surjectief, en daarmee bijectief.
2. Om te laten zien dat twee verzamelingen  $A$  en  $B$  gelijkmachtig zijn, moeten we het *bestaan* van een bijectie tussen  $A$  en  $B$  aantonen. Dit kan door:

- twee injecties te construeren, één van  $A \rightarrow B$  en één van  $B \rightarrow A$ , en vervolgens de stelling van Cantor–Bernstein toe te passen. Voor deze opgave, met  $A = (0, 1]$  en  $B = [1, 3)$ , construeren we twee injecties  $f : A \rightarrow B$  en  $g : B \rightarrow A$  bijvoorbeeld door:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \\ g(x) &= \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

en Cantor–Bernstein garandeert ons dat er dan ook een bijectie tussen  $A$  en  $B$  bestaat.

- rechtstreeks een bijectie te construeren, bijvoorbeeld  $h : A \rightarrow B$ :

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{als } x \neq 1 \\ 1 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

of, een ander voorbeeld van een bijectie,  $k : A \rightarrow B$ :

$$k(x) = 3 - 2x$$

- (a) De verzameling van oneindige rijtjes over  $\{0, 1\}$  is overaftelbaar.  
 (b) De verzameling  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  is aftelbaar.  
 (c) De verzameling  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  is overaftelbaar.

**Opgave 18.** (uit hertentamen 2006 06 06)

1. Gegeven zijn de functies  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  door:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ g(x) &= 0 \\ h(x) &= 1 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Geef voor elke functie aan of zij injectief en/of surjectief is. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

(NB.  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .)

2. Laat zien dat de volgende verzamelingen gelijkmachtig zijn:  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$  en  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ .
3. Geef van de volgende verzamelingen aan of ze aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig zijn (het antwoord alleen volstaat):
  - (a) de verzameling  $\mathbb{Q}$  van rationale getallen;
  - (b) de verzameling van eindige rijtjes over  $\{0, 1\}$ ;
  - (c) de verzameling  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  van functies van  $\mathbb{N}$  naar  $\{0, 1\}$ ;
  - (d) de verzameling  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  van deelverzamelingen van natuurlijke getallen;

- (e) de verzameling van reële getallen tussen 0 en 1.

*Uitwerking van opgave 18:*

1. Gegeven zijn de functies  $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .
  - (a) De functie  $f$  gegeven door  $f(x) = x^3$  is injectief en surjectief.
  - (b) De functie  $g$  gegeven door  $g(x) = 0$  is niet injectief, beschouw bijvoorbeeld  $g(0) = g(1) = 0$ ;  $g$  is ook niet surjectief, er is bijvoorbeeld geen  $x$  zodat  $g(x) = 1$ .
  - (c) De functie  $h$  gegeven door  $h(x) = 1 - \frac{x}{2}$  is injectief, maar niet surjectief, immers er is (bijv.) geen  $x$  zodat  $h(x) = 0$ .
2. Gelijkmachtigheid van  $[0, 1)$  en  $(0, 2]$  volgt uit het bestaan van een bijectie, bijvoorbeeld  $f : [0, 1) \rightarrow (0, 2]$  gegeven door:

$$f(x) = 2(1 - x)$$

Een ander voorbeeld is  $g : [0, 1) \rightarrow (0, 2]$  gegeven door:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{als } x = 0 \\ 2x & \text{anders} \end{cases}$$

3.
  - (a) de verzameling  $\mathbb{Q}$  is aftelbaar;
  - (b) de verzameling van eindige rijtjes over  $\{0, 1\}$  is aftelbaar;
  - (c) de verzameling  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  is overaftelbaar;
  - (d) de verzameling  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  is overaftelbaar;
  - (e) de verzameling  $(0, 1)$  van rationale getallen tussen 0 en 1 is aftelbaar (NB: de verzameling  $(0, 1)$  van reële getallen tussen 0 en 1 is overaftelbaar!).