

## opgaven formele structuren ‘Turing Machines’

### Opgave 1.

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine die de eerste 1 rechts van de kop vindt, daar de kop zet, en dan niets meer doet.
- (b) Geef de transitietabel van een Turing Machine die de eerste 11 rechts van de kop vindt, de kop bij de eerste 1 zet, en dan niets meer doet. (N.B. na de tweede 1 mag best nog een 1 komen.)

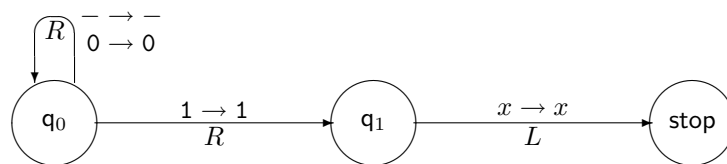
*Uitwerking van opgave 1:*

- (a) De Turing Machine die de eerste 1 rechts van de kop vindt, daar de kop zet, en vervolgens in een stoptoestand komt heeft drie toestanden:
- (i) een toestand  $q_0$  die aangeeft dat er nog geen 1 gelezen is,
  - (ii) een toestand  $q_1$  die aangeeft dat de eerste 1 gevonden is,
  - (iii) een stoptoestand **stop**.

De transitietabel van deze Turing Machine ziet er als volgt uit:

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| $q_0$ | – | – | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$ |
| $q_1$ | – | – | $L$ | stop  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $L$ | stop  |
| $q_1$ | 1 | 1 | $L$ | stop  |

En de transitiegraaf is (we gebruiken de notatie  $x \rightarrow x$  om aan te geven dat elk symbool door zichzelf vervangen wordt):



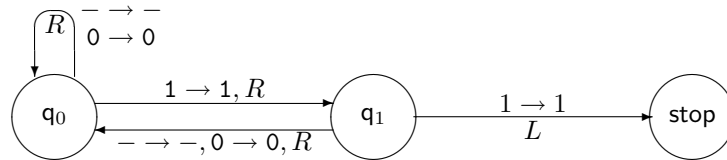
- (b) De Turing Machine die de eerste 11 rechts van de kop vindt, de kop bij de eerste 1 plaatst, en vervolgens in een stoptoestand komt heeft drie toestanden:
- (i) een toestand  $q_0$  die aangeeft dat niet in de vorige stap een 1 gelezen is,
  - (ii) een toestand  $q_1$  die aangeeft dat er in de vorige stap een 1 gelezen is,

(iii) een stoptoestand **stop**.

De transitietabel van deze Turing Machine ziet er als volgt uit:

|       |     |     |     |             |
|-------|-----|-----|-----|-------------|
| $q_0$ | $-$ | $-$ | $R$ | $q_0$       |
| $q_0$ | $0$ | $0$ | $R$ | $q_0$       |
| $q_0$ | $1$ | $1$ | $R$ | $q_1$       |
| $q_1$ | $-$ | $-$ | $R$ | $q_0$       |
| $q_1$ | $0$ | $0$ | $R$ | $q_0$       |
| $q_1$ | $1$ | $1$ | $L$ | <b>stop</b> |

En de transitiegraaf is (we gebruiken weer wat afkortingen):



**Opgave 2.** Het berekeningsalgoritme voor *successor* transformeert een natuurlijk getal  $n$  in zijn opvolger  $n + 1$ . Geef een beschrijving van een Turing Machine die dit algoritme implementeert.

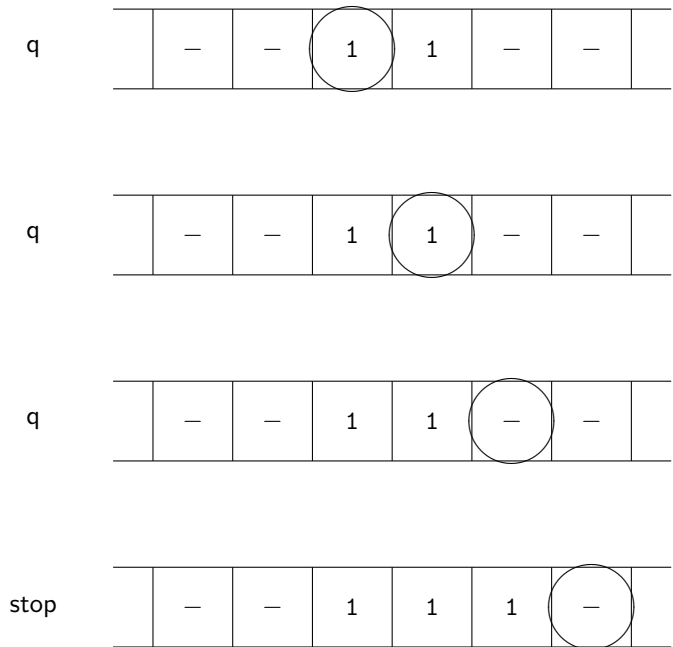
Een natuurlijk getal  $n$  wordt weer gerepresenteerd als  $n + 1$  keer een symbool  $1$ , omringd door alleen maar symbolen  $-$ . Verder gaan we ervan uit dat de kop van de Turing Machine aan het begin van de berekening de eerste  $1$  leest.

*Uitwerking van opgave 2:*

De Turing Machine *successor* heeft twee toestanden:  $q$  en **stop**. In de toestand  $q$  loopt de kop van de Turing Machine de string van  $1$ 'en af, verandert daar niets, en loopt door tot hij een blanco symbool  $-$  tegenkomt. Dat wordt vervangen door een symbool  $1$ , en vervolgens gaat de Turing Machine over in de stoptoestand **stop**. De transitietabel van *successor* is:

|     |     |     |     |             |
|-----|-----|-----|-----|-------------|
| $q$ | $1$ | $1$ | $R$ | $q$         |
| $q$ | $-$ | $1$ | $R$ | <b>stop</b> |

Als voorbeeld bekijken we de berekening van de successor van  $1$ :



Een alternatief: de Turing Machine kan ook direct één plaats naar links gaan, daar een 1 schrijven en dan termineren.

**Opgave 3.** Het beslissingsalgoritme *drievoud* herkent uit de strings over het alfabet  $\{0, 1\}$  precies die strings die van de vorm  $1^{3n}$  met  $n$  een natuurlijk getal zijn. Geef een beschrijving van een Turing Machine die dit algoritme implementeert.

We gaan ervan uit dat er op de input tape een string over  $\{0, 1\}$  staat, en verder alleen blanco symbolen. De kop staat aan het begin bij het eerste symbool van de string.

*Uitwerking van opgave 3:*

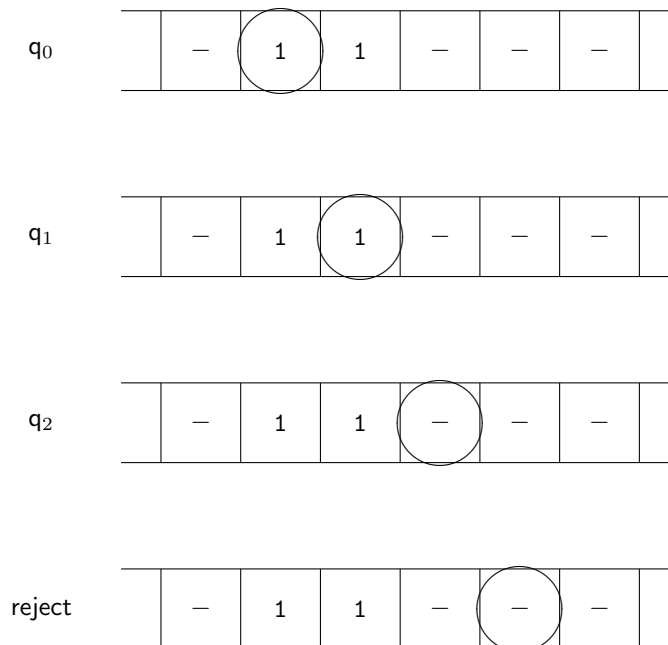
De Turing Machine *drievoud* heeft vijf toestanden:

- (a) een toestand  $q_0$  waarin een string 1'en ter lengte 0 modulo 3 is gelezen,
- (b) een toestand  $q_1$  waarin een string 1'en ter lengte 1 modulo 3 is gelezen,
- (c) een toestand  $q_2$  waarin een string 1'en ter lengte 2 modulo 3 is gelezen,
- (d) een stoptoestand **accept** die aangeeft dat de input geaccepteerd is,
- (e) een stoptoestand **reject** die aangeeft dat de input geweigerd is.

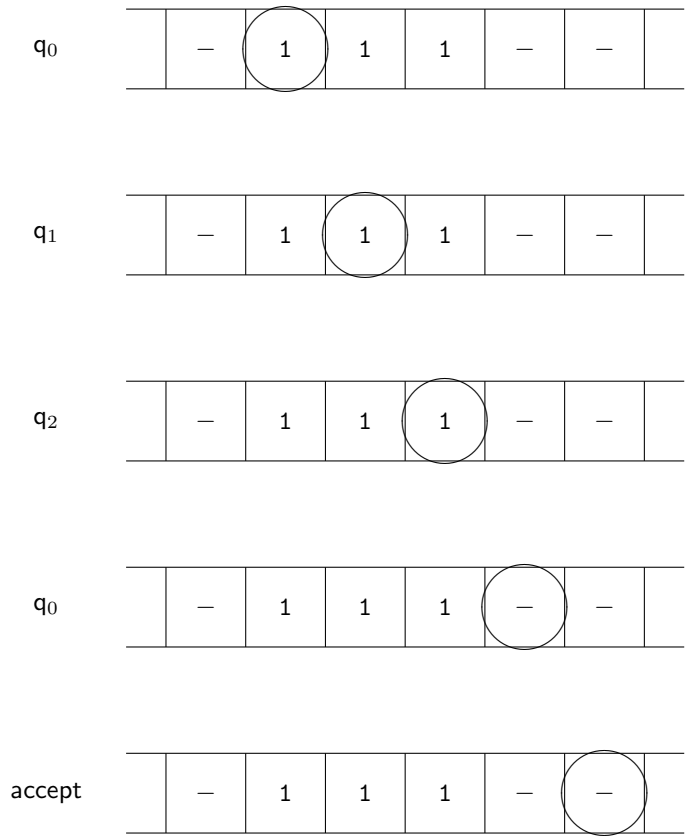
De transitietabel van deze Turing Machine ziet er als volgt uit:

|                |   |   |   |                |
|----------------|---|---|---|----------------|
| q <sub>0</sub> | - | - | R | accept         |
| q <sub>0</sub> | 0 | 0 | R | reject         |
| q <sub>0</sub> | 1 | 1 | R | q <sub>1</sub> |
| q <sub>1</sub> | - | - | R | reject         |
| q <sub>1</sub> | 0 | 0 | R | reject         |
| q <sub>1</sub> | 1 | 1 | R | q <sub>2</sub> |
| q <sub>2</sub> | - | - | R | reject         |
| q <sub>2</sub> | 0 | 0 | R | reject         |
| q <sub>2</sub> | 1 | 1 | R | q <sub>0</sub> |

Een voorbeeld waarbij de input-string geweigerd wordt:



Een voorbeeld waarbij de input-string geaccepteerd wordt:



Een alternatief: je hoeft geen toestand **reject** te gebruiken maar mag ook zeggen dat een string alleen geaccepteerd wordt als de Turing Machine termineert in toestand **accept** (en dus niet geaccepteerd wordt in alle andere gevallen).

**Opgave 4.** We gaan ervan uit dat de input tape een string over het alfabet  $\{0, 1\}$  bevat, en verder alleen symbolen  $-$ . Verder veronderstellen we dat de kop van de Turing Machine bij het begin van de berekening bij het eerste symbool van de string staat.

Geef de transitietabel van een Turing Machine die in de string het eerste symbool  $0$  opspoort, de kop één plaats links daarvan zet, en dan termineert.

*Uitwerking van opgave 4:*

De Turing Machine heeft twee toestanden: **q** en **stop**. Zijn transitietabel is als volgt:

|   |   |   |   |      |
|---|---|---|---|------|
| q | – | – | R | q    |
| q | 0 | 0 | L | stop |
| q | 1 | 1 | R | q    |

**Opgave 5.** (uit tentamen 30 mei 2000)

Het beslissingsalgoritme *tweevoud* herkent uit de strings over het alfabet  $\{0, 1\}$  precies die strings die van de vorm  $1^{2^n}$  zijn, met  $n$  een natuurlijk getal.

Geef de transitietabel en de bijbehorende transitiegraaf van de Turing Machine die dit algoritme implementeert.

We gaan ervan uit dat er op de input tape een string over  $\{0, 1\}$  staat, en verder alleen blanco symbolen. De kop staat aan het begin bij het eerste symbool van de string.

**Opgave 6.** (uit hertentamen 17 augustus 2000)

Deze opgave gaat over Turing Machines. We gaan er van uit dat er op de input tape een eindige string over  $\{0, 1\}$  staat, en verder alleen blanco symbolen (–). De kop staat aan het begin bij het meest linkse symbool van de string.

- (a) Geef de *transitietabel* van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0^n 1$  accepteert, met  $n$  een natuurlijk getal, dus  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- (b) Geef de *transitiegraaf* van een Turing Machine die het meest linkse symbool 0 opspoort, daar de kop plaatst, en dan termineert.

Als de string geen symbool 0 bevat, dan zet de Turing Machine de kop bij het laatste symbool van de string en termineert dan.

**Opgave 7.** (uit tentamen 30 maart 2001)

- (a) Op de inputtape staat één string over het alfabet  $\{0, 1\}$ . We gaan ervan uit dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linker symbool van deze string staat. Voor de rest staan er alleen blanco symbolen (–).

Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $00(1^{2^n})$  accepteert, met  $n$  een natuurlijk getal, dus  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

- (b) Wat is het Halting Problem?

*Uitwerking van opgave 7:*

- (a) De transitietabel:

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_2$  |
| $q_2$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_2$ | 1 | 1 | $R$ | $q_3$  |
| $q_3$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |

De begintoestand is  $q_0$ , en de string wordt alleen geaccepteerd als de Turing Machine stopt in de toestand **accept**.

- (b) Het Halting probleem is: gegeven een Turing Machine TM en een tape  $w$ , stopt TM op  $w$ ?

**Opgave 8.** (uit hertentamen 17 augustus 2001)

- (a) Op de inputtape van een Turing Machine staat één string over het alfabet  $\{0, 1\}$ . We gaan ervan uit dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linker symbool van deze string staat. Voor de rest staan er alleen blanco symbolen (—).

Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0(1^{2^n})0$  accepteert, met  $n$  een natuurlijk getal, dus  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

- (b) Geef een voorbeeld van een taal die wel door een Turing Machine maar niet door een DEA herkend kan worden.
- (c) Bestaan er algoritmes die niet door een Turing Machine gemodelleerd kunnen worden? Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, leg uit waarom niet.

*Uitwerking van opgave 8:*

- (a) De transitietabel:

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_2$  |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_3$  |
| $q_2$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_3$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |

De begintoestand is  $q_0$ , en de string wordt alleen geaccepteerd als de Turing Machine stopt in de toestand **accept**.

- (b) De taal bestaande uit alle strings van de vorm  $0^n 1^n$  met  $n$  een natuurlijk getal.
- (c) Nee, want alles wat berekenbaar is, is te modelleren als Turing Machine.

**Opgave 9.** (uit tentamen 5 juni 2002)

- (a) Gegeven is een input tape met de representatie van een natuurlijk getal en verder alleen blanco symbolen  $-$ . Een natuurlijk getal  $n$  wordt gerepresenteerd door  $n + 1$  keer een symbool  $1$ . De kop van de Turing Machine staat bij het meest linkse symbool van de representatie van het getal.

Geef de transitietabel van een Turing Machine die de predecessor functie implementeert. De predecessor is een functie van natuurlijke getallen naar natuurlijke getallen die het volgende doet:

- $0$  wordt afgebeeld op  $0$ ,
- $n$  met  $n > 0$  wordt afgebeeld op  $n - 1$ .

Een tweede eis aan de gevraagde Turing Machine is dat de kop aan het eind van de berekening bij het eerste symbool van de output string staat.

- (b) Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0^{2p}1^{3q}$  accepteert.

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over  $\{0, 1\}$  bevat (en verder alleen blanco symbols  $-$ ), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin van de berekening bij het meest linkse symbool van de input string staat.

- (c) Geef een voorbeeld van een taal die wel door een Turing Machine maar niet door een deterministische eindige automaat herkend kan worden.

*Uitwerking van opgave 9:*

- (a)

|       |     |     |     |       |
|-------|-----|-----|-----|-------|
| $q_0$ | 1   | 1   | $R$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $-$ | $-$ | $L$ | stop  |
| $q_1$ | 1   | 1   | $L$ | $q_2$ |
| $q_2$ | 1   | $-$ | $R$ | stop  |

- (b)

|       |     |     |     |        |
|-------|-----|-----|-----|--------|
| $q_0$ | $-$ | $-$ | $R$ | accept |
| $q_0$ | 0   | 0   | $R$ | $q_1$  |
| $q_0$ | 1   | 1   | $R$ | $q_3$  |
| $q_1$ | 0   | 0   | $R$ | $q_0$  |
| $q_2$ | $-$ | $-$ | $R$ | accept |
| $q_2$ | 1   | 1   | $R$ | $q_3$  |
| $q_3$ | 1   | 1   | $R$ | $q_4$  |
| $q_4$ | 1   | 1   | $R$ | $q_2$  |

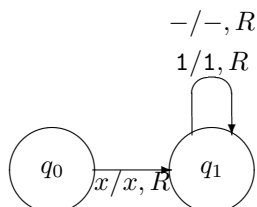
- (c) De taal  $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  kan wel door een TM maar niet door een DEA worden herkend.

**Opgave 10.** (uit hertentamen 16 augustus 2002)

- (a) Geef de transitiegraaf van een Turing Machine die de eerste 0 rechts van de kop opspoort (niet op de plek waar de kop aan het begin staat, maar één of meer plekken verder naar rechts), daar de kop plaatst, en dan termineert.
- (b) Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0^{2n}1$ , met  $n$  een natuurlijk getal, dus  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , herkent.
- (c) We schrijven  $w^R$  voor de string  $w$  achterstevoren. Dus we hebben bijvoorbeeld  $(011)^R = 110$  en  $(0001)^R = 1000$ .  
Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $w w^R$  accepteert, met  $w$  een string over  $\{0, 1\}$ .

*Uitwerking van opgave 10:*

(a)



(b)

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_2$ | — | — | $L$ | accept |

- (c) De starttoestand is  $q_0$ . Als er een 0 gelezen wordt, wordt die vervangen door een  $-$ . De Turing machine komt in toestand  $q_1$  waarin het volgende gebeurt: loop over de string heen zonder iets te veranderen naar rechts, tot het einde, ga dan naar links en ga over tot toestand  $q_2$ . Als het laatste symbool een 0 is wordt die vervangen door een  $-$ . De machine komt in toestand  $q_3$  waarin het begin van de string weer opgezocht wordt; dan komt de machine weer in toestand  $q_0$ . Als aan het begin in toestand  $q_0$  niet een 0 maar een 1 gelezen wordt gebeurt er net zoiets (met toestanden  $q_4$  in plaats van  $q_1$  en  $q_5$  in plaats van  $q_2$ ). Als in  $q_0$  een  $-$  gelezen wordt, wordt de string geaccepteerd. In alle andere gevallen wordt de string niet geaccepteerd.

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_0$ | 0 | — | $R$ | $q_1$  |
| $q_0$ | 1 | — | $R$ | $q_4$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | — | — | $L$ | $q_2$  |
| $q_2$ | 0 | — | $L$ | $q_3$  |
| $q_3$ | 0 | 0 | $L$ | $q_3$  |
| $q_3$ | 1 | 1 | $L$ | $q_3$  |
| $q_3$ | — | — | $R$ | $q_0$  |
| $q_4$ | 0 | 0 | $R$ | $q_4$  |
| $q_4$ | 1 | 1 | $R$ | $q_4$  |
| $q_4$ | — | — | $L$ | $q_5$  |
| $q_5$ | 0 | — | $L$ | $q_3$  |

**Opgave 11.** (uit tentamen 26 maart 2003)

- (a) Construeer een Turing machine die, startend met de kop op het meest linkse symbool van een eindige string over het alfabet  $\{0, 1\}$ , in deze string elke 1 door een 0 vervangt en dan stopt.
- (b) Gegeven is de Turing machine  $T$  met transitietabel

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_0$  |
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_0$ | — | — | $L$ | accept |
| $q_1$ | — | — | $L$ | reject |

Bij het begin van de berekening leest de kop van de Turing Machine het eerste symbool van de (eindige) string.

- (i) Wordt de string 11010 door  $T$  geaccepteerd?
- (ii) Wordt de string 0100 door  $T$  geaccepteerd?
- (iii) Geef in het algemeen aan welke strings door  $T$  worden geaccepteerd en welke niet.

**Opgave 12.** (uit hertentamen 15 augustus 2003)

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0^n 10^n$  (met  $n > 0$ ) herkent.
- (b) Beschouw de Turing Machine  $T$  met tabel

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 0 | 1 | $L$ | $q_1$ |
| $q_1$ | 1 | 1 | $L$ | $q_1$ |
| $q_1$ | — | — | $R$ | $q_2$ |
| $q_2$ | 1 | — | $R$ | $q_0$ |

Bij het begin van de berekening leest  $T$  het meest linkse symbool van een string 0-en en 1-en.

- (i) Als  $T$  begint met de inputstring 111, welke string staat er dan op de band na terminatie? (Die string is de output.)
- (ii) Wat is de output als  $T$  begint met de inputstring 00 ?
- (iii) Wat is de output als  $T$  begint met de inputstring 110101 ?
- (iv) Beschrijf in het algemeen wat  $T$  voor output geeft bij een willekeurige inputstring.

**Opgave 13.** (uit tentamen 23 maart 2004)

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over  $\{0, 1\}$  bevat (en verder alleen blanco symbolen —), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.

- a. Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0^p 1^{2q}$  herkent, met  $p, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- b. Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $1^p 0^p$  herkent, met  $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

*Uitwerking van opgave 13:*

a.

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | — | — | $R$ | reject |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | reject |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |
| $q_2$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_2$ | 0 | 0 | $R$ | reject |
| $q_2$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |

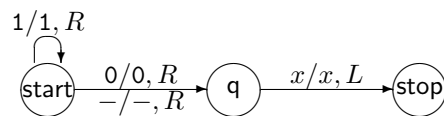
b.

|                |   |   |   |                |
|----------------|---|---|---|----------------|
| q <sub>0</sub> | – | – | R | accept         |
| q <sub>0</sub> | 1 | – | R | q <sub>1</sub> |
| q <sub>1</sub> | – | – | L | q <sub>2</sub> |
| q <sub>1</sub> | 1 | 1 | R | q <sub>1</sub> |
| q <sub>1</sub> | 0 | 0 | R | q <sub>1</sub> |
| q <sub>2</sub> | 0 | – | L | q <sub>3</sub> |
| q <sub>3</sub> | – | – | R | q <sub>0</sub> |
| q <sub>3</sub> | 1 | 1 | L | q <sub>3</sub> |
| q <sub>3</sub> | 0 | 0 | L | q <sub>3</sub> |

**Opgave 14.** (uit hertentamen 29 juni 2004)

- a. Wat doet de Turing Machine gedefinieerd door de volgende transitiegraaf als de input een eindige string over  $\{0, 1\}$  is?

(NB: De Turing Machine begint met het lezen van het meest linkse symbool. Met  $x/x$  wordt bedoeld dat  $x$  een willekeuring symbool is.)



- b. Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $1^{2p}0^q$  herkent, met  $p, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over  $\{0, 1\}$  bevat (en verder alleen blanco symbolen  $-$ ), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.

**Opgave 15.** Op de inputtape staat één string over het alfabet  $\{0, 1\}$ . We gaan ervan uit dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linker symbool van deze string staat. Voor de rest staan er alleen symbolen  $-$ .

Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $00(1^{2n})$  accepteert, met  $n$  een natuurlijk getal, dus  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

*Uitwerking van opgave 15:*

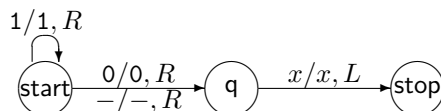
De transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $00(1^{2n})$  accepteert:

|                |   |   |   |                |
|----------------|---|---|---|----------------|
| q <sub>0</sub> | 0 | 0 | R | q <sub>1</sub> |
| q <sub>1</sub> | 0 | 0 | R | q <sub>2</sub> |
| q <sub>2</sub> | – | – | R | accept         |
| q <sub>2</sub> | 1 | 1 | R | q <sub>3</sub> |
| q <sub>3</sub> | 1 | 1 | R | q <sub>2</sub> |

Hier is  $q_0$  de starttoestand en een string wordt alleen geaccepteerd als de Turing Machine stopt in toestand **accept**.

**Opgave 16.** Wat doet de Turing Machine gedefinieerd door de volgende transitiegraaf als de input een eindige string over  $\{0, 1\}$  is?

(NB: De Turing Machine begint met het lezen van het meest linkse symbool. Met  $x/x$  wordt bedoeld dat  $x$  een willekeuring symbool is.)



*Uitwerking van opgave 16:*

De Turing Machine leest eerst alle 1en en vervangt die weer door 1en. Zodra er een 0 of een  $-$  gelezen wordt komt de Turing Machine in een nieuwe toestand, leest nog een symbool, gaat dan naar links en termineert. Aan het eind staat de kop dus bij het eerste symbool dat geen 1 is.

**Opgave 17.** Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm  $1^{2p}0^q$  herkent, met  $p, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over  $\{0, 1\}$  bevat (en verder alleen blanco symbolen  $-$ ), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.

*Uitwerking van opgave 17:*

De transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $(1^{2p})0^q$  accepteert:

|       |     |     |     |        |
|-------|-----|-----|-----|--------|
| $q_0$ | $-$ | $-$ | $R$ | accept |
| $q_0$ | 0   | 0   | $R$ | $q_2$  |
| $q_0$ | 1   | 1   | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 1   | 1   | $R$ | $q_0$  |
| $q_2$ | $-$ | $-$ | $R$ | accept |
| $q_2$ | 0   | 0   | $R$ | $q_2$  |

Hier is  $q_0$  de starttoestand en een string wordt alleen geaccepterd als de Turing Machine stopt in toestand **accept**.

**Opgave 18.**

- Geef de transitietabel van een Turing Machine met twee toestanden die eerst één 1 print, dan nog een 1 rechts daarvan, dan nog een 1 links van de twee 1-en, dan weer een 1 rechts van de drie 1-en, dan weer een 1 links van de vier 1-en, enzovoorts. Deze Turing Machine termineert niet.
- Gegeven is een Turing Machine  $T$  met de volgende transitietabel:

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_0$  |
| $q_0$ | — | — | $L$ | accept |
| $q_1$ | — | — | $L$ | reject |

Bij het begin van de berekening leest  $T$  het eerste symbool van een eindige string over  $\{0, 1\}$ .

- (i) Geef een string die geaccepteerd wordt door  $T$  en een string die niet geaccepteerd wordt door  $T$ .
- (ii) Welke strings worden in het algemeen door  $T$  geaccepteerd?

*Uitwerking van opgave 18:*

(a)

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| $q_0$ | — | 1 | $R$ | $q_1$ |
| $q_0$ | 1 | 1 | $L$ | $q_0$ |
| $q_1$ | — | 1 | $L$ | $q_0$ |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$ |

Hier is  $q_0$  de starttoestand.

(b)

- (i) Een string die geaccepteerd wordt door  $T$ :  $\lambda$ . Een string die niet geaccepteerd wordt door  $T$ : 1.
- (ii)  $T$  accepteert de eindige strings over  $\{0, 1\}$  met een even aantal 1en.

### Opgave 19.

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $0^{2k}1^l$  herkent, met  $k, l \in \mathbb{N}$ .

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over  $\{0, 1\}$  bevat (en verder alleen blanco symbolen —), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.

- (b) Gegeven is de Turing Machine met de volgende transitietabel:

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_2$ | — | — | $L$ | accept |

- (i) Geef een string die geaccepteerd wordt door  $T$  en een string die niet geaccepteerd wordt door  $T$ .
- (ii) Welke strings worden in het algemeen door  $T$  geaccepteerd?

*Uitwerking van opgave 19:*

- (a) De transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm  $(0^{2k})1^l$  accepteert:

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_1$  |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_2$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_2$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |

Hier is  $q_0$  de starttoestand en een string wordt alleen geaccepteerd als de Turing Machine stopt in toestand **accept**.

- (b)
  - (i) Voorbeelden van strings die niet geaccepteerd worden:  $\lambda$ , 0, 00, 01, 10, 11.  
 Voorbeelden van strings die wel geaccepteerd worden: 1, 001.
  - (ii)  $T$  accepteert de strings van de vorm  $0^{2n}1$  met  $n \in \mathbb{N}$ .

**Opgave 20.** Geef de transitiegraaf van een Turing Machine die een op de tape staande eindige string over  $\{0, 1\}$  precies één plaats naar rechts opschuift.

**Opgave 21.** Gegeven is de Turing Machine met de volgende transitietabel:

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| start | 0 | — | $R$ | $q_0$ |
| start | 1 | — | $R$ | $q_1$ |
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 1 | 0 | $R$ | $q_1$ |
| $q_0$ | — | 0 | $R$ | stop  |
| $q_1$ | 0 | 1 | $R$ | $q_0$ |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$ |
| $q_1$ | — | 1 | $R$ | stop  |

De Turing Machine begint in toestand **start** met de kop bij het eerste symbool van de string.

- (i) Wat doet de Turing Machine op input 101?
- (ii) Wat doet de Turing Machine op input een niet-lege string over  $\{0, 1\}$ ?

**Opgave 22.**

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine die het laatste symbool van een string over  $\{0, 1\}$  weghaalt en vooraan de string neerzet. Ga ervan uit dat de kop bij de start aan het begin van de (niet-lege) string staat.
- (b) Gegeven is de Turing Machine met de volgende transitietabel:

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | — | — | $L$ | $q_1$ |
| $q_1$ | 0 | — | $L$ | $q_2$ |
| $q_1$ | 1 | — | $L$ | $q_2$ |
| $q_2$ | 0 | — | $L$ | $q_3$ |
| $q_2$ | 1 | — | $L$ | $q_3$ |

De Turing Machine begint in toestand  $q_0$  met de kop bij het eerste symbool van de eindige string over  $\{0, 1\}$ .

- (i) Wat is het resultaat als de string op de tape 1 is?
- (ii) Wat is het resultaat als de string op de tape 010 is?
- (iii) Wat doet de machine in het algemeen?
- (c) Geef de transitiegraaf van een Turing Machine die de taal  $\{0^n 10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  herkent.

*Uitwerking van opgave 22:*

- (a) De transitietabel van een Turing Machine die het laatste symbool van een string over  $\{0, 1\}$  weghaalt en vooraan de string neerzet:

|       |   |   |     |       |
|-------|---|---|-----|-------|
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_0$ |
| $q_0$ | — | — | $L$ | $q_1$ |
| $q_1$ | 0 | — | $L$ | $q_2$ |
| $q_1$ | 1 | — | $L$ | $q_3$ |
| $q_2$ | 0 | 0 | $L$ | $q_2$ |
| $q_2$ | 1 | 1 | $L$ | $q_2$ |
| $q_2$ | — | 0 | $R$ | stop  |
| $q_3$ | 0 | 0 | $L$ | $q_3$ |
| $q_3$ | 1 | 1 | $L$ | $q_3$ |
| $q_3$ | — | 1 | $R$ | stop  |

Hier is  $q_0$  de starttoestand.

- (b)

- (i) De lege tape (alleen maar symbolen  $-$ ).
  - (ii) Een tape met daarop alleen het symbool 0; de kop staat bij 0.
  - (iii) De Turing Machine verandert de laatste twee symbolen van een string over  $\{0, 1\}$  in  $-$ . Dan termineert de machine met de kop bij het laatste symbool van de output-string.
- (c) De starttoestand is  $q_0$  en de enige accept-toestand is  $\text{accept}$ .

