

Uitwerking Proeftentamen Toegepaste Logica

December 1998

Opgave 1.

a.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[(A \rightarrow B)^x] \quad I[w] \rightarrow}{A \rightarrow (A \rightarrow B)} \quad E \rightarrow \\
 \frac{[A^z] \quad \frac{[(A \rightarrow B)^x] \quad I[w] \rightarrow}{A \rightarrow (A \rightarrow B)} \quad E \rightarrow}{A \rightarrow B} \quad E \rightarrow \\
 \frac{B \quad I[z] \rightarrow}{A \rightarrow B} \quad I[y] \rightarrow \\
 \frac{A \rightarrow A \rightarrow B \quad I[y] \rightarrow}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B} \quad I[x] \rightarrow
 \end{array}$$

Er zijn andere antwoorden mogelijk.

b.

$$\frac{y \in \text{Var}_A \quad \frac{z \in \text{Var}_A \quad \frac{x \in \text{Var}_{A \rightarrow B} \quad x : A \rightarrow B}{\lambda w : A.x : A \rightarrow (A \rightarrow B)}}{z : A} \quad (\lambda w : A.x)z : A \rightarrow B}{y : A} \quad (\lambda w : A.x)zy : B}{\lambda z : A.(\lambda w : A.x)zy : A \rightarrow B} \quad \lambda y : A.\lambda z : A.(\lambda w : A.x)zy : A \rightarrow A \rightarrow B}{\lambda x : A \rightarrow B.\lambda y : A.\lambda z : A.(\lambda w : A.x)zy : (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B}$$

c.

$$\begin{array}{l}
 \lambda x : A \rightarrow B.\lambda y : A.\lambda z : A.(\lambda w : A.x)zy \quad \rightarrow_\beta \\
 \lambda x : A \rightarrow B.\lambda y : A.\lambda z : A.xy
 \end{array}$$

d.

$$\frac{[(A \rightarrow B)^x] \quad [A^y] \quad E \rightarrow}{\frac{B \quad I[z] \rightarrow}{A \rightarrow B} \quad I[y] \rightarrow} \quad I[x] \rightarrow$$

Opgave 2.

- a. Het typeerbaarheidsprobleem: Gegeven een gesloten ongetypeerde λ -term M , is er een type A zodanig dat $\vdash M : A$?
- b. Stap 1: het berekenen van een stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\emptyset; \lambda x.xx; a) &= \mathcal{T}(x : b; xx; c) \cup \{b \rightarrow c \approx a\} \\ &= \mathcal{T}(x : b; x; d \rightarrow c) \cup \mathcal{T}(x : b; x; d) \cup \{b \rightarrow c \approx a\} \\ &= \{d \rightarrow c \approx b, d \approx b, b \rightarrow c \approx a\}. \end{aligned}$$

Stap 2: pas het unificatie algoritme toe op het in stap 1 gegenereerde stelsel vergelijkingen. De vergelijking die de stap van het unificatie algoritme bepaalt staat in boldface.

$$\begin{aligned} (\{b \approx d \rightarrow c, \mathbf{b} \approx \mathbf{d}, a \approx b \rightarrow c\}, \epsilon) &\Rightarrow (\{\mathbf{d} \approx \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{c}, a \approx d \rightarrow c\}, \\ &\quad [b := d]) \\ &\Rightarrow \text{failure} \end{aligned}$$

want d komt voor in $d \rightarrow c$ en $d \neq d \rightarrow c$.

Conclusie: de term $\lambda x.xx$ is niet typeerbaar in simpel getypeerde lambda calculus.

- c. Stap 1: het berekenen van een stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\emptyset; \lambda y.(\lambda x.xy)(\lambda z.z); a) &= \mathcal{T}(y : b; (\lambda x.xy)(\lambda z.z); c) \cup \{b \rightarrow c \approx a\} \\ &= \mathcal{T}(y : b; \lambda x.xy; d \rightarrow c) \cup \mathcal{T}(y : b; \lambda z.z; d) \cup \\ &\quad \{b \rightarrow c \approx a\} \\ &= \mathcal{T}(y : b, x : e; xy; f) \cup \{e \rightarrow f \approx d \rightarrow c\} \cup \\ &\quad \mathcal{T}(y : b, z : g; z; h) \cup \{g \rightarrow h \approx d\} \cup \\ &\quad \{b \rightarrow c \approx a\} \\ &= \mathcal{T}(y : b, x : e; x; i \rightarrow f) \cup \mathcal{T}(y : b, x : e; y; i) \\ &\quad \cup \{e \rightarrow f \approx d \rightarrow c\} \cup \{h \approx g\} \cup \\ &\quad \{d \approx g \rightarrow h\} \cup \{b \rightarrow c \approx a\} \\ &= \{e \approx i \rightarrow f, i \approx b, e \rightarrow f \approx d \rightarrow c, h \approx g, \\ &\quad d \approx g \rightarrow h, a \approx b \rightarrow c\}. \end{aligned}$$

Stap 2: pas het unificatie algoritme toe op het in stap 1 gegenereerde stelsel vergelijkingen. De vergelijking die de stap van het unificatie algoritme bepaalt staat in boldface.

$$\begin{aligned} (\{e \approx i \rightarrow f, i \approx b, \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{f} \approx \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{c}, h \approx g, d \approx g \rightarrow h, a \approx b \rightarrow c\}; \epsilon) &\Rightarrow \\ (\{e \approx i \rightarrow f, i \approx b, \mathbf{e} \approx \mathbf{d}, f \approx c, h \approx g, d \approx g \rightarrow h, a \approx b \rightarrow c\}; \epsilon) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\{d \approx i \rightarrow f, i \approx b, f \approx c, h \approx g, \mathbf{d} \approx \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{h}, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d]) \Rightarrow \\
& (\{\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{h} \approx \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{f}, i \approx b, f \approx c, h \approx g, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d][d := g \rightarrow h]) \Rightarrow \\
& (\{\mathbf{g} \approx \mathbf{i}, h \approx f, i \approx b, f \approx c, h \approx g, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d][d := g \rightarrow h]) \Rightarrow \\
& (\{h \approx f, i \approx b, f \approx c, \mathbf{h} \approx \mathbf{i}, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d][d := g \rightarrow h][g := i]) \Rightarrow \\
& (\{\mathbf{i} \approx \mathbf{f}, i \approx b, f \approx c, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d][d := g \rightarrow h][g := i][h := i]) \Rightarrow \\
& (\{\mathbf{f} \approx \mathbf{b}, f \approx c, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d][d := g \rightarrow h][g := i][h := i][i := f]) \Rightarrow \\
& (\{\mathbf{b} \approx \mathbf{c}, a \approx b \rightarrow c\}; [e := d][d := g \rightarrow h][g := i][h := i][i := f][f := b]) \Rightarrow \\
& (\{\mathbf{a} \approx \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}\}; [e := d][d := g \rightarrow h][g := i][h := i][i := f][f := b][b := c]) \Rightarrow \\
& (\emptyset; [e := d][d := g \rightarrow h][g := i][h := i][i := f][f := b][b := c][a := c \rightarrow c]).
\end{aligned}$$

Conclusie: $c \rightarrow c$ is het principle type van $\lambda y.(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$.

Opgave 3.

a.

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}M & \rightarrow_{CL} M \\
\mathbf{K}MN & \rightarrow_{CL} M \\
\mathbf{S}MNP & \rightarrow_{CL} MP(MN)
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{SII})_{\Lambda} & = (\mathbf{SI})_{\Lambda}(\mathbf{I})_{\Lambda} \\
& = (\mathbf{S})_{\Lambda}(\mathbf{I})_{\Lambda}(\mathbf{I})_{\Lambda} \\
& = (\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz))(\lambda u.u)(\lambda w.w).
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\mathbf{SII}x & \rightarrow_{CL} \mathbf{I}x(\mathbf{I}x) \\
& \rightarrow_{CL} x(\mathbf{I}x) \\
& \rightarrow_{CL} xx.
\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz))(\lambda u.u)(\lambda w.w) & \rightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda z.(\lambda u.u)z(yz))(\lambda w.w) \\
& \rightarrow_{\beta} \lambda z.(\lambda u.u)z((\lambda w.w)z) \\
& \rightarrow_{\beta} \lambda z.z((\lambda w.w)z) \\
& \rightarrow_{\beta} \lambda z.zz.
\end{aligned}$$

Opgave 4.

a. Alle recursieve functies zijn definieerbaar in ongetypeerde λ -calculus.

b. Zij F een willekeurige ongetypeerde λ -term. Dan is $\mathbf{Y}F$ met

$$fp = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

een fixpoint van F want we hebben:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}F &= (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) F \\ &=_{\beta} (\lambda x.F(xx)) (\lambda x.F(xx)) \\ &=_{\beta} F ((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))) \\ &=_{\beta} F ((\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) F) \\ &= F(\mathbf{Y}F). \end{aligned}$$

Opgave 5.

a. Zij F een functie met het volgende gedrag:

$$\begin{aligned} F0 &= [] \\ F1 &= [1] \\ F2 &= [2, 2] \\ F3 &= [3, 3, 3] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dus F kan toegepast worden op een natuurlijk getal. Als n een natuurlijk getal is, dan is Fn een lijst van natuurlijke getallen ter lengte n . Als er voor elk natuurlijk getal i een type $\mathbf{natlist}(i)$ van lijsten natuurlijke getallen ter lengte i is, dan is Fn van type $\mathbf{natlist}(n)$. Het type van Fn hangt dus af van n .

b. Een fragment van lambda calculus met afhankelijke types, λP , correspondeert via het Curry-Howard-De Bruijn isomorfisme met (eerste orde) predikatenlogica.

c.

$$\frac{\frac{[\forall x.A(x)^w]}{A(N)} E\forall}{(\forall x.A(x)) \rightarrow A(N)} I[w] \rightarrow$$

d.

$$\frac{\frac{w : \Pi x : 0.A(x) \quad N : 0}{wN : A(N)}}{\lambda w : \Pi x : 0.A(x).wN : \Pi x : 0.A(x) \rightarrow A(N)}$$

Opgave 6.

- a. $\lambda x : \text{Nat}. x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$,
 $\lambda x : \text{Bool}. x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$.

b.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi x : A. B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B[x := N]}$$

- c. $\lambda a : \text{Set}. \lambda x : a. x : \Pi a : \text{Set}. \Pi x : a. a$.

d.

$$\frac{\lambda a : \text{Set}. \lambda x : a. x : \Pi a : \text{Set}. \Pi x : a. a \quad \text{Nat} : \text{Set}}{(\lambda a : \text{Set}. \lambda x : a. x) \text{Nat} : \Pi x : \text{Nat}. \text{Nat}}$$

e.

$$\begin{aligned} \text{succ } C_2 &= (\lambda x : \text{Nat}. \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s(x a s z)) C_2 \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s(C_2 a s z) \\ &= \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. \\ &\quad s((\lambda a' : \text{Set}. \lambda s' : a' \rightarrow a'. \lambda z' : a'. s'^n(z')) a s z) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s((\lambda s' : a \rightarrow a. \lambda z' : a. s'^n(z')) s z) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s((\lambda z' : a. s^n(z')) z) \\ &\rightarrow_{\beta} \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s(s^n(z)) \\ &= \lambda a : \text{Set}. \lambda s : a \rightarrow a. \lambda z : a. s^{n+1}(z) \\ &= C_{n+1}. \end{aligned}$$