# Proeftentamen Toegepaste Logica

December 1998

**Opgave 1.**

a. Geef, in natuurlijke deductie van minimale logica, een bewijs van de formule $(A \to B) \to A \to A \to B$ dat een detour bevat en dat geen niet-ingetrokken assumpties bevat.

   (5 punten)

b. Beschouw $(A \to B) \to A \to A \to B$ als een simpel type. Geef de lambda-term en de type afleiding corresponderend met het bewijs uit het antwoord op vraag 1a (in simpel getypeerde $\lambda$-calculus à la Church).

   (5 punten)

c. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 1b naar $\beta$-normaalvorm.

   (5 punten)

d. Geef het bewijs in natuurlijke deductie dat correspondeert met de lambda-term in $\beta$-normaalvorm gevonden in 1c.

   (5 punten)

**Opgave 2.**

a. Formuleer het typeerbaarheidsprobleem.

   (3 punten)

b. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de term $\lambda x.xx$ typeerbaar is in simpel getypeerde lambda-calculus à la Curry, en geef zo mogelijk het principle type.

   (5 punten)

c. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de term $\lambda y.(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$ typeerbaar is in simpel getypeerde lambda-calculus à la Curry, en geef zo mogelijk het principle type.

   (5 punten)

**Opgave 3.**

a. Geef de reductieregels voor de combinatoren $\mathsf{S}$, $\mathsf{K}$ en $\mathsf{I}$.

(3 punten)

b. Geef de vertaling van de CL-term $\mathsf{SII}$ in $\lambda$-calculus.

(5 punten)

c. Reduceer de CL-term $\mathsf{SII}x$ naar normaalvorm.

(5 punten)

d. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 3b naar $\beta$-normaalvorm.

(5 punten)

**Opgave 4.**

a. Welke functies zijn definieerbaar in ongetypeerde $\lambda$-calculus?

(3 punten)

b. Gebruik de fixpoint-combinator $\mathbf{Y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ om te laten zien dat elke term een fixpoint heeft, in ongetypeerde lambda calculus.

(5 punten)

**Opgave 5.**

a. Geef een voorbeeld van het gebruik van dependent types (afhankelijke types).

(3 punten)

b. Een fragment van lambda calculus met dependent types correspondeert met een logica. Welke logica is dat?

(3 punten)

c. We schrijven $A(x)$ voor een formule die mogelijkerwijs vrije voorkomens van de variabele $x$ bevat, en $A(N)$ voor het resultaat van het vervangen van die vrije voorkomens van $x$ door de term $N$.

Laat in zien dat de formule $(\forall x.A(x)) \to A(N)$ een tautologie is in de logica bedoeld in 5b.

(5 punten)

d. Geef de type afleiding in lambda P die correspondeert met het bewijs gevraagd in 5c.

(5 punten)

**Opgave 6.**

a. Zij $2 : \mathsf{Nat}$ en $\mathtt{t} : \mathsf{Bool}$. Geef de identiteit die toepasbaar is op de term 2 en die welke toepasbaar is op de term $\mathsf{Bool}$, in beide gevallen in simpel getypeerde lambda calculus à la Church.

(2 punten)

b. Geef de applicatieregel voor lambda calculus met polymorfe types.

(2 punten)

c. Geef de polymorfe identiteit als lambda term en het bijbehorende type. Gebruik de officiële notatie van $\lambda P2$ à la Church.

(3 punten)

d. Geef de instantie van de applicatieregel die laat zien hoe je de polymorfe identiteit kunt gebruiken om de identiteit op type $\mathsf{Nat}$ te maken.

(3 punten)

e. In lambda calculus definieren we het type $\mathsf{Nat}$, de polymorfe Church numerals en de term **succ** als volgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Nat} & = & \Pi a : \mathtt{Set}.(a \to a) \to a \to a, \\ C_n & = & \lambda a : \mathtt{Set}.\lambda s : a \to a.\lambda z : a.s^n(z) \\ \mathbf{suc} & = & \lambda x : \mathsf{Nat}.\lambda a : \mathtt{Set}.\lambda s : a \to a.\lambda z : a.s(x\ a\ s\ z). \end{array}$$

Beta-reduceer de term **succ** $C_2$ naar $\beta$-normaalvorm.

(5 punten)