Tentamen Toegepaste Logica

13 januari 1999

Opgave 1.

a. Geef, in natuurlijke deductie van minimale logica, een bewijs van de formule $((A \to B) \to C) \to (A \to B) \to A \to C$ dat een detour bevat en dat geen niet-ingetrokken assumpties bevat.

(5 punten)

b. Beschouw $((A \to B) \to C) \to (A \to B) \to A \to C$ als een simpel type. Geef de lambda-term en de type afleiding corresponderend met het bewijs uit het antwoord op vraag 1a (in simpel getypeerde λ-calculus à la Church).

(5 punten)

c. Beta-reduceer de lambda-term gevonden in 1b naar β-normaalvorm.

(2 punten)

d. Geef het bewijs in natuurlijke deductie dat correspondeert met de lambda-term in β-normaalvorm gevonden in 1c.

(5 punten)

Opgave 2.
Deze opgave betreft simpel getypeerde λ-calculus à la Curry.

a. Formuleer het typeerbaarheidsprobleem.

(3 punten)

b. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de λ-term $\lambda x.\ xxx$ typeerbaar is, en geef zo mogelijk het principal type.

(5 punten)

c. Gebruik het typeringsalgoritme om te bepalen of de λ-term $\lambda y.\lambda x.\ yxx$ typeerbaar is, en geef zo mogelijk het principal type.

(5 punten)

Opgave 3.

a. Geef de reductieregel voor de combinator S van Combinatorische Logica.

(2 punten)

b. Reduceer de CL-term $\mathsf{S}\,(\mathsf{SII})\,\mathsf{I}\,x$ naar normaalvorm.

(4 punten)

c. Geef de vertaling van de CL-term $\mathsf{S}\,(\mathsf{SII})\,\mathsf{I}\,x$ in λ-calculus.

(5 punten)

d. Beta-reduceer de in 3b gevonden λ-term naar naar β-normaalvorm.

(3 punten)

e. Zijn er simpele types A en B met $S : A$ en $I : B$ zodanig dat de CL-term $\mathsf{S}(\mathsf{SII})\mathsf{I}x$ typeerbaar is? Motiveer Uw antwoord.

(5 punten)

Opgave 4.

a. Zij $A_+ = \lambda x.\lambda y.\lambda s.\lambda z.\ x\ s\ (y\ s\ z)$. We schrijven de Church numerals als c_n. Laat zien dat $A_+ c_n c_m =_\beta c_{n+m}$ voor alle natuurlijke getallen n en m.

(5 punten)

b. Stel dat alle Church numerals een zeker (ongespecificeerd) type B hebben. Is het dan mogelijk de term $A_+ c_n c_m$ te typeren en waarom (niet)?

(N.B. Er wordt niet gevraagd om het typeringsalgoritme toe te passen.)

(5 punten)

c. Formuleer het inhabitation (bewoondheid) probleem.

(3 punten)

d. Met welk probleem in minimale logica correspondeert het inhabitation probleem (via het Curry-Howard-De Bruijn isomorfisme)?

(3 punten)

e. Geef twee verschillende gesloten normaalvormen van type $(A \to A) \to A \to A$.

(4 punten)

Opgave 5.

a. We schrijven $A(x)$ voor een formule die mogelijkerwijs vrije voorkomens van de variabele x bevat, en $A(N)$ voor het resultaat van het vervangen van die vrije voorkomens van x door de term N.

   Laat zien dat de formule $A \to \forall x.A$ een tautologie is in eerste-orde predikatenlogica.

   (5 punten)

b. Geef de type afleiding in λP (lambda-calculus met afhankelijke types) die precies correspondeert met het bewijs gevraagd in 5a.

   (5 punten)

Opgave 6.
Deze opgave betreft λ-calculus met polymorfe types ($\lambda P2$). Zij **nat** het type van natuurlijke getallen.

a. Geef de polymorfe identiteit als lambda-term en het bijbehorende type. Gebruik de officiële notatie van $\lambda P2$ à la Church.

   (3 punten)

b. Geef de instantie van de applicatieregel die laat zien hoe je de polymorfe identiteit kunt gebruiken om de identiteit op type `Nat` te maken.

   (3 punten)

c. We schrijven $A \to B$ in plaats van $\Pi x : A.B$ als x niet vrij voorkomt in B. We definiëren het type **natlist**, en de termen **nil** en **cons** als volgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{natlist} & = & \Pi a : \mathtt{Set}.\ a \to (\mathbf{nat} \to a \to a) \to a \\ \mathbf{nil} & = & \lambda a : \mathtt{Set}. \lambda x : a. \lambda y : \mathbf{nat} \to a \to a.\ x \\ \mathbf{cons}\ M\ L & = & \lambda a : \mathtt{Set}. \lambda x : a. \lambda y : \mathbf{nat} \to a \to a.\ y\ M\ (L\ a\ x\ y) \end{array}$$

   met M : **nat** en L : **natlist**.

   Beta-reduceer de term **cons** 1(**cons** 2 **nil**) naar normaalvorm.

   (5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.