

Fouriertransformatie

De Fourierreeks van een functie f op het interval $[-l, l]$ wordt geheel bepaald door het rijtje van de Fouriercoëfficiënten

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx.$$

Als f voldoet aan de voorwaarden van Dirichlet (bijvoorbeeld als de $2l$ -periodieke voortzetting van f continu is) dan geldt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad -l \leq x \leq l.$$

Het nadeel van de omzetting van f naar een Fourierreeks is dat de som van de reeks altijd een $2l$ -periodieke functie is. De frequenties die gerepresenteerd worden in de som van de reeks zijn gehele veelvouden van $\frac{1}{2l}$. Signalen die een continu spectrum hebben kunnen we dus niet goed representeren, evenmin als niet-periodieke functies.

Het idee is om nu $l \rightarrow \infty$ te nemen. Zonder op details in te gaan (zie bijvoorbeeld het boek van M. Boas, pagina 380 voor een heuristische uitleg hoe de vork in de steel zit) geven we de volgende definitie.

Voor een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is de *Fouriertransformatie van f* de functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (1)$$

De *inverse Fouriertransformatie van F* is

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (2)$$

Mits f aan de voorwaarden van Dirichlet voldoet op elk gesloten interval in \mathbb{R} , en mits $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, geldt inderdaad dat de twee transformaties elkaars inverse zijn, in de volgende zin: als f continu is in x , dan geldt (2), als f discontinu is in x dan geldt

$$\frac{1}{2} (\lim_{t \uparrow x} f(t) + \lim_{t \downarrow x} f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (3)$$

(Vergelijk ook R.V. Churchill, J.W. Brown: *Fourier Series and Boundary Value Problems*, pagina 224).

Let op de formele overeenkomst met de Fourierreeks: bij de reeks wordt een functie f omgezet in een rij getallen $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ die de functie representeren, bij de transformatie wordt de functie f omgezet in een functie F die de oorspronkelijke functie representeert. Als we aan f denken als een functie van de tijd, dan is F een functie van de frequenties.

De constante $\frac{1}{2\pi}$ voor de Fouriertransformatie wordt in sommige teksten vervangen door $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, dan komt ook bij de inverse Fouriertransformatie een factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ voor de integraal te staan. De keuze die hier gemaakt wordt is gebruikelijk in de fysica en in technische toepassingen; vanwege symmetrie-overwegingen is de andere keuze gebruikelijk binnen de wiskunde.

Eigenschappen

Zonder al te veel te willen bewijzen, de volgende eigenschappen van de Fouriertransformatie:

Eigenschap 1. Verschuiving. Als $F(\omega)$ de Fouriertransformatie van $f(x)$ is dan geldt: $e^{-ic\omega}F(\omega)$ is de Fouriertransformatie van $f(x-c)$, en $F(\omega-c)$ is de Fouriertransformatie van $e^{icx}f(x)$.

Eigenschap 2. Schaling. Als $F(\omega)$ de Fouriertransformatie van $f(x)$ is dan geldt: $\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$ is de Fouriertransformatie van $f(ax)$.

Eigenschap 3. Differentiatie. Als $F(\omega)$ de Fouriertransformatie van $f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, is dan geldt: $i\omega F(\omega)$ is de Fouriertransformatie van $f'(x)$. Als voorts ook nog $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$ dan geldt: $-\omega^2 F(\omega)$ is de Fouriertransformatie van $f''(x)$.

Om dit te zien gebruik je simpelweg partiële integratie. Je ziet dan ook waar de voorwaarde op de limieten van $f(x)$ voor x naar $\pm\infty$ gebruikt wordt. Vanwege deze eigenschap is de Fouriertransformatie net als de Laplacetransformatie erg handig bij het bestuderen van differentiaalvergelijkingen.

Eigenschap 4. Parseval's gelijkheid.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Opgaven

1. Bewijs Eigenschap 1.
2. Bewijs Eigenschap 2. Aanwijzing: maak onderscheid tussen $a > 0$ en $a < 0$.
3. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} a, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Bepaal de Fouriertransformatie van f .

4. Gebruik je antwoord van opgave 3 en formule (3) om de volgende integraal uit te rekenen:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega.$$