De Laplace-transformatie

De Laplace-transformatie is een instrument dat functies omzet in andere functies. Deze omzetting, de transformatie, heeft nette wiskundige eigenschappen. Zowel in de kansrekening als in de toegepaste analyse bewijst de Laplace-transformatie goede diensten. Wij zullen voornamelijk gebruik maken van de Laplace-transformatie bij het oplossen van d.v.'s.

We beschouwen functies die gedefinieerd zijn op heel $\mathbb{R}$ maar die voor $t < 0$ de waarde 0 aannemen. Laat f zo'n functie zijn. Definieer voor reële s de functie F door

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

We noemen F de *Laplace-getransformeerde* van f en noteren hem wel met $\mathcal{L}(f)$; het is echter ook gebruikelijk hoofdletters te gebruiken, dus $\mathcal{L}(f) = F$, $\mathcal{L}(x) = X$ enzovoort.

Opmerking : Bij afspraak is $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ gelijk aan $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(t)e^{-st}dt$ (mits deze limiet bestaat).

Het hangt dus van de functie f af, of er waarden van s bestaan waarvoor $F(s)$ bestaat. Wat men kan laten zien is dat als $F(s_0)$ bestaat voor een zekere s_0 dan bestaat $F(s)$ ook voor elke $s > s_0$.

Een grote klasse van functies waarvoor zo'n s_0 bestaat is die van de exponentieel begrensde functies. We noemen f *exponentieel begrensd* als een reële getal s_0 en M bestaan zó dat $|f(t)| < e^{s_0 t}$ voor alle $t \geq M$. Men kan dan met niet al te veel moeite aantonen dat voor $s > s_0$ de functiewaarde $F(s)$ bestaat.

Voorbeeld 1. Voorbeelden van exponentieel begrensde functies zijn: alle begrensde functies, de functies t^k met $k \geq 0$ en de functies e^{pt} met $p \in \mathbb{R}$. De functie e^{t^2} is niet exponentieel begrensd.

We zullen een paar voorbeelden van Laplace-transformaties bekijken.

Voorbeeld 2. Als $f(t) = 1$ voor elke $t \geq 0$ dan geldt voor $s \neq 0$:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty} [-\frac{1}{s}e^{-st}]_0^R = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{s}(1 - e^{-sR}).$$

Deze limiet bestaat, en is gelijk aan $\frac{1}{s}$, als $s > 0$ en bestaat niet als $s < 0$. N.B. $\mathcal{L}(1)(0) = \int_0^\infty 1\,dt$ bestaat ook niet. De Laplace getransformeerde van 1 is dus $1/s$, met domein $(0, \infty)$. We schrijven wel kortweg $\mathcal{L}(1)(s) = 1/s$.

Voorbeeld 3. De functie $f(t) = e^{pt}$ heeft ook een Laplace getransformeerde:

Voor $R > 0$ en $s \neq p$ geldt

$$\int_0^R e^{pt} e^{-st} dt = \frac{1}{p-s} [e^{(p-s)t}]_0^R = \frac{1}{s-p} \big(1 - e^{(p-s)R}\big).$$

Als we vervolgens de limiet voor R naar oneindig nemen vinden we

$$\mathcal{L}(e^{pt})(s) = \frac{1}{s-p}$$

voor $s > p$. Voor $s \leq p$ bestaat $\mathcal{L}(e^{pt})(s)$ niet.

Verdere voorbeelden van Laplace-transformaties moeten even wachten tot we een paar eigenschappen van $\mathcal{L}$ bekeken hebben. Eén van die eigenschappen is de gemakkelijk te bewijzen *lineariteit* van de Laplace-transformatie.

Stelling 1 *Voor de Laplace-transformatie geldt: als $\mathcal{L}(f)$ en $\mathcal{L}(g)$ bestaan voor $s > s_0$ dan bestaat ook $\mathcal{L}(f+g)$ voor $s > s_0$ en*

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g),$$

en als verder λ een reëel getal is, dan bestaat $\mathcal{L}(\lambda f)$ ook en

$$\mathcal{L}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}(f).$$

We zeggen wel dat de Laplace transformatie daardoor een lineaire afbeelding is.

Het nut van deze stelling moge duidelijk zijn: we kunnen een som van functies term voor term transformeren en de getransformeerden optellen. Een eigenschap van $\mathcal{L}$ die niet zo eenvoudig in te zien is, is de injectiviteit.

Stelling 2 *Laat f en g continue functies op $[0, \infty)$ zijn zó dat $\mathcal{L}(f)$ en $\mathcal{L}(g)$ beide bestaan voor $s > s_0$ en dat ze gelijk zijn. Dan zijn f en g aan elkaar gelijk.*

We laten het bewijs van deze stelling achterwege omdat het meer wiskundig gereedschap vergt dan we tot nu toe verzameld hebben. Het nut van deze stelling staat echter buiten kijf: Als we bij een gegeven functie F een functie f gevonden hebben zó dat $\mathcal{L}(f) = F$ dan is f uniek (we hoeven niet bang te zijn dat we oplossingen 'vergeten').

Het verband tussen $\mathcal{L}(f)$ en $\mathcal{L}(f')$ is van groot belang in vele toepassingen. Met name bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van Laplace getransformeerden. We komen hier aan het eind van deze paragraaf op terug.

Stelling 3 *Laat f een functie zijn waarvoor een getal s_0 bestaat met de eigenschap dat $\mathcal{L}(f)(s)$ bestaat voor $s > s_0$ èn dat $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$ voor $s > s_0$. Dan bestaat ook $\mathcal{L}(f')(s)$ voor $s > s_0$ en*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Bewijs. Laat $s > s_0$ en $R > 0$. We bepalen $\int_0^R f'(t)e^{-st}dt$ met behulp van partiële integratie:

$$\begin{aligned}\int_0^R f'(t)e^{-st}dt &= [f(t)e^{-st}]_0^R - \int_0^R -sf(t)e^{-st}dt \\ &= f(R)e^{-sR} - f(0) + s\int_0^R f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Als we R naar oneindig laten gaan dan komt er $-f(0) + s\mathcal{L}(f)(s)$, zoals gesteld. $\square$

Voorbeeld 4. De afgeleide van e^{pt} is pe^{pt}, dus de Laplace getransformeerde van pe^{pt} is volgens Stelling 3 gelijk aan $s\mathcal{L}(e^{pt})(s) - 1 = s/(s-p) - 1$. Als we dit onder één noemer brengen dan komt er $p/(s-p)$ en dit is inderdaad hetzelfde als $p\mathcal{L}(e^{pt})$

We kunnen Stelling 3 ook gebruiken om Laplace getransformeerden van primitieven te bepalen. Immers als $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ dan volgt

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\mathcal{L}(f')(s) + f(0)}{s}.$$

Definiëren we nu, bij gegeven f, de functie F door $F(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$, dan geldt

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s}.$$

Immers, F is de primitieve van f die voldoet aan $F(0) = 0$.

Voorbeeld 5. De Laplace getransformeerde van t is $1/s^2$, immers

$$\mathcal{L}(t)(s) = \frac{\mathcal{L}(1)(s)}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Dit kan natuurlijk ook rechtstreeks: $\int te^{-st}dt = \frac{1}{s}(-te^{-st} - \frac{1}{s}e^{-st})$ en dus $\int_0^\infty te^{-st}dt = 1/s^2$.

Voorbeeld 6. Zo voortgaand kunnen we voor elke positieve gehele macht van t de Laplace-getransformeerde berekenen, er geldt immers:

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(nt^{n-1})(s) = \frac{n}{s}\mathcal{L}(t^{n-1})(s).$$

Omdat we $\mathcal{L}(t^0)$ en $\mathcal{L}(t^1)$ al hebben kunnen we vervolgens achtereenvolgens afleiden dat $\mathcal{L}(t^2)(s) = 2/s^3$, $\mathcal{L}(t^3)(s) = 6/s^4$ en uiteindelijk komen we dan voor elke n op de formule $\mathcal{L}(t^n)(s) = n!/s^{n+1}$.

Om onze lijst volledig te maken bepalen we nog de Laplace getransformeerden van de sinus en cosinus. Dit kan natuurlijk door de integralen

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin pt\, dt \qquad \text{en} \qquad \int_0^\infty e^{-st} \cos pt\, dt$$

uit te rekenen. Het kan echter ook heel makkelijk door de eigenschappen van de Laplace-transformatie die we tot nu toe ontdekt hebben te gebruiken.

Voorbeeld 7. De Laplace getransformeerde van $x(t) = \sin pt$ kunnen we als volgt bepalen: Allereerst realiseren we ons dat $x'' = -p^2 x$; verder geldt $x(0) = 0$ en $x'(0) = p$. Gebruik makend van Stelling 3 bepalen we eerst $\mathcal{L}(x'')$:

$$\mathcal{L}(x'') = s\mathcal{L}(x') - x'(0) = s\big(s\mathcal{L}(x) - x(0)\big) - x'(0) = s^2\mathcal{L}(x) - p.$$

De lineariteit geeft $\mathcal{L}(-p^2 x) = -p^2\mathcal{L}(x)$. We krijgen dus de vergelijking

$$s^2\mathcal{L}(x) - p = -p^2\mathcal{L}(x).$$

Hieruit volgt

$$\mathcal{L}(\sin pt)(s) = \frac{p}{s^2 + p^2}.$$

Op analoge wijze volgt: $\mathcal{L}(\cos pt)(s) = s/(s^2 + p^2)$ (zie Opgave 1).

Gerelateerd aan Stelling 3 is de volgende opmerking.

Stelling 4 *Als $\mathcal{L}(f) = F$, dan is $\mathcal{L}(tf(t)) = -F'$.*

Dat zien we als volgt: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Differentieer dat nu naar s:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = !!!! \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right) dt = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)dt.$$

Bij de uitroeptekens verwisselen we integratie en differentiatie. Dat mag natuurlijk niet altijd zomaar. Er zijn voorwaarden aan te geven waaronder het wel geoorloofd is, we gaan daarop niet verder in.

Gelijkvormigheid.

Laat $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, en bekijk de Laplace transformatie van de functie $g(t) = f(at)$, waar a een constante is. Daarvoor geldt, met behulp van de substitutie $u = at$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}).$$

Opschuiven.

In sommige situaties is het handig de Laplace-getransformeerde te nemen van een opgeschoven functie. Bedenk dat we werken met functies f gedefinieerd op $\mathbb{R}$, met de conventie $f(t) = 0$ voor $t < 0$. Opschuiven over een positieve afstand a naar rechts betekent nu het volgende.

Definitie: Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie (herinner dat $f(t) = 0$ voor $t < 0$) en $a \geq 0$; we noteren met f_a de functie die we krijgen door f over a eenheden op te schuiven. In formulevorm: $f_a(t) = f(t - a)$.

Voorbeeld 8. Als we de constante functie 1 (dat wil zeggen 1 voor $t \geq 0$ en 0 voor $t < 0$) opschuiven naar het interval $[a, \infty)$ dan is de Laplace getransformeerde van die opgeschoven functie gelijk aan $\int_a^\infty e^{-st}dt = e^{-as}/s$. De Laplace getransformeerde van de functie die 1 is op $[0, a)$ en 0 elders is dan $(1 - e^{-sa})/s$ (waarom?)

De functie H_a gedefinieerd door

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < a \\ 1 & \text{als } \ t \geq a \end{cases}$$

wordt de *Heaviside functie* genoemd. In het voorgaande voorbeeld is dus voor $a \geq 0$ berekend dat $\mathcal{L}(H_a)(s) = e^{-as}/s$.

Voorbeeld 9. Als we een functie van de vorm e^{pt} opschuiven dan komt er:

$$\int_a^\infty e^{p(t-a)}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{pt}e^{-s(t+a)}dt = e^{-as}\mathcal{L}(e^{pt})(s) = \frac{e^{-as}}{s-p}.$$

De afgekapte functie heeft Laplace getransformeerde

$$\int_0^a e^{pt}e^{-st}dt = \frac{1}{s-p}(1 - e^{(p-s)a}).$$

Het beperken van een functie tot een interval van de vorm $[0, a]$ leidt in het algemeen niet tot een eenvoudige formule voor de Laplace getransformeerde maar het opschuiven doet dit wel; in de voorbeelden hierboven werd de getransformeerde van de oorspronkelijke functie met e^{-as} vermenigvuldigd. Dit geldt algemeen.

Stelling 5 *Laat $a > 0$, laat $f_a(t) = f(t - a)$. Dan geldt*

$$\mathcal{L}(f_a)(s) = \int_0^\infty f_a(t)e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt =$$
$$= \int_0^\infty f(t)e^{-s(t+a)}dt = e^{-as}\mathcal{L}(f)(s).$$

Verband houdend hiermee, maar veel simpeler is de volgende opmerking.

Stelling 6 *Laat $\mathcal{L}(f) = F$, en beschouw voor $a > 0$ de functie $g(t) = e^{-at}f(t)$. Dan*

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)dt = F(s+a).$$

Hiermee zien we eenvoudig in dat $\mathcal{L}(te^t)(s) = \mathcal{L}(t)(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Dat kun je ook zien met Stelling 4: $\mathcal{L}(te^t)(s) = -\mathcal{L}(e^t)'(s) = -(\frac{1}{s-1})' = \frac{1}{(s-1)^2}$.

Convolutie.

Een belangrijke operatie op functies is de *convolutie*. Als f en g functies zijn, gedefinieerd op $\mathbb{R}$, dan is hun convolutieprodukt $f * g$ als volgt gedefinieerd

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau.$$

Natuurlijk moeten er voorwaarden aan f en g worden opgelegd opdat $f * g$ bestaat. In ons geval is het voldoende aan te nemen dat f en g over elk eindig interval integreerbaar zijn. Wij beschouwen immers alleen functies die op het interval $(-\infty, 0)$ de waarde 0 aannemen. In dat geval is $f(\tau)g(t-\tau)$ gelijk aan 0 voor elke $\tau < 0$ en elke $\tau > t$. We houden over

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau.$$

Deze integraal bestaat als f en g integreerbaar zijn op $[0, t]$.

Opmerking : In de kansrekening speelt de convolutie een rol: als X en Y onafhankelijke stochasten zijn met kansdichtheden respectievelijk f en g dan is $f * g$ de kansdichtheid van $X + Y$. Met andere woorden, voor elke a geldt

$$\mathbb{P}(X + Y \leq a) = \int_{-\infty}^{a} (f * g)(t)\, dt.$$

Belangrijk is dat de Laplace-transformatie convoluties in gewone produkten overvoert:

Stelling 7 *Als $\mathcal{L}(f)(s)$ en $\mathcal{L}(g)(s)$ bestaan dan bestaat $\mathcal{L}(f*g)(s)$ ook en geldt: $\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$.*

Bewijs. We berekenen de Laplace-getransformeerde van $f * g$:

$$\int_0^\infty (f*g)(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\, d\tau dt.$$

Deze integraal is in feite een integraal over het gebied $\{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \tau \le t\}$. We kunnen de integratievolgorde verwisselen: Eerst naar t (telkens van τ tot ∞) en dan naar τ (van 0 tot ∞). Dit levert op

$$\int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}\,dtd\tau = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)e^{-s\tau}g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dtd\tau.$$

Van het rechterlid kunnen we

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \cdot \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dt \qquad (*)$$

maken. Tenslotte merken we op dat met de substitutie $u = t - \tau$ in te zien is dat

$$\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dt = \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du = \mathcal{L}(g)(s),$$

waarmee we $(*)$ gelijk gepraat hebben aan

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \cdot \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt$$

en dit is precies gelijk aan $\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$. $\square$

Opmerking : Bovenstaand bewijs is natuurlijk lang niet volledig; we hebben de integratievolgorde verwisseld zonder ons af te vragen of dat mocht. Een nauwkeurige beschouwing leert echter dat het bewijs geldig is voor die waarden van s waarvoor $\mathcal{L}(f)$ en $\mathcal{L}(g)$ beide bestaan.

Voorbeeld 10. De convolutie van H_0 met zichzelf is snel bepaald: $(H_0 * H_0)(t) = \int_0^t 1\,d\tau = t$. We zien weer dat $\mathcal{L}(t) = 1/s^2$: Immers,

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(1 * 1) = \mathcal{L}(1)\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Stelling 7 is vooral handig bij terugtransformeren. Als blijkt dat de Laplace-transformatie van een functie een produkt van eenvoudige factoren is dan is de functie zelf de convolutie van eenvoudige functies.

Voordat we een belangrijke toepassing zullen behandelen, is het tijd eens een lijst met Laplace-getransformeerden op te stellen. Ze staan in de tabel op bladzijde 10. Enkele daarvan hebben we zojuist berekend, andere kun je zelf nagaan (zie Opgave 1). Voor het gemak hebben we in de tabel de notatie $F(s)$ voor $\mathcal{L}(f(t))$ gebruikt. Voor de Laplace getransformeerde van $g(t)$ noteren we $G(s)$.

Oplossen van differentiaalvergelijkingen.

We behandelen nu een belangrijke toepassing: het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen. Via Stelling 3 weten we al dat als $F(s)$ de Laplace getransformeerde is van $f(t)$, dat dan $sF(s) - f(0)$ de Laplace getransformeerde is van $f'(t)$. Op exact dezelfde manier vinden we voor de Laplace getransformeerde van $f''(t)$ de functie $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ [ga na!]. Zo voortgaand verkrijgen we voor de Laplace getransformeerde van $f^{(n)}(t)$ (zie ook de tabel):

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Als we nu de Laplace transformatie laten werken op een lineaire differentiaalvergelijking met onbekende $y(t)$ en evt. beginwaarden $y(0), y'(0)$ etc., dan verkrijgen we een lineaire vergelijking in $Y(s)$, de Laplace getransformeerde van $y(t)$. Als we die vergelijking hebben opgelost, kunnen we (hopelijk) via de tabel uitvinden welke functie bij de gevonden Laplace getransformeerde hoort. Immers, volgens Stelling 2 is de Laplace getransformeerde uniek!
We zullen dit eens verduidelijken aan de hand van een voorbeeld:

Voorbeeld 11. Los het volgende beginwaarde probleem op d.m.v. Laplace transformatie:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sin 2x, \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Oplossing. We nemen van de drie functies uit de differentiaalvergelijking de Laplace getransformeerde en vinden zo ($Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

We vullen de beginwaarden in en lossen de vergelijking op naar $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Deze $Y(s)$ staat niet in de tabel en dat is meestal ook niet te verwachten. We passen echter breuksplitsing toe:

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4}.$$

Nu kunnen we de tabel wel gebruiken! Kennelijk is de functie die als Laplace getransformeerde $Y(s)$ heeft gelijk aan:

$$y(x) = \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x,$$

en dit is dus de oplossing van onze differentiaalvergelijking.

Voorbeeld 12. Nu een wat ingewikkelder voorbeeld. Los het volgende beginwaarde probleem op d.m.v. Laplace transformatie:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y(t) + y(t) = te^t, \\ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Merk op dat het rechterlid, de functie te^t een oplossing is van de homogene vergelijking. We nemen links en rechts de Laplace getransformeerde; gebruik daarbij dat $\mathcal{L}(te^t)(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Dat geeft

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Dus:

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + sy(o) + y'(0) - 2y(0) = \frac{1}{(s-1)^2} + s - 2.$$

Daaruit krijgen we

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{s-2}{(s-1)^2}.$$

We moeten nu hieruit $y(t)$ zien terug te vinden. Gebruik de stelling over verschuiving: $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s-1)^4} = \frac{1}{3!}t^3e^t$. Op de tweede term passen we breuksplitsing toe

$$\frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{s-1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Nu is $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-1}) = e^t$ en $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s-1)^2}) = te^t$. Alles samenrapend:

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{6}t^3e^t}_{\text{particuliere oplossing}} + \underbrace{e^t - te^t}_{\text{oplossing van de homogene vergelijking}}.$$

Reken ter controle na dat $\frac{1}{6}t^3e^t$ inderdaad een oplossing is van de inhomogene differentiaalvergelijkin.

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n,\, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Table 1: Tabel van functies met hun Laplace getransformeerden.

1 Vraagstukken Laplace transformatie

1. Controleer de juistheid van de tabel van Laplacegetransformeerden.

2. Bepaal (op een handige manier!) de Laplace getransformeerden van de volgende functies:

   (i) $3x + 5$

   (ii) $e^x \sin 2x$

   (iii) $x^n e^{\lambda x}$, $(n \in \mathbb{N})$

   (iv) $\int_0^x \sin(t) \cos(x-t)\, dt$

3. Bepaal $f(t)$ (o.a. met behulp van Tabel 2.1), als $F(s)$, de Laplacegetransformeerde van $f(t)$, gegeven is door:

   (i) $\frac{1}{s^6}$

   (ii) $\frac{5s+3}{s^2+4}$

   (iii) $\frac{s-6}{s^2-4}$

   (iv) $\frac{2s+3}{s^2+6s+13}$

4. Bepaal met behulp van Laplace transformatie de oplossing van de volgende beginwaardeproblemen:

   a. $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = x \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1. \end{cases}$

   b. $\begin{cases} y^{(3)}(x) - y'(x) = 1 \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = -1. \end{cases}$

   c. $\begin{cases} y''(x) - y(x) = f(x) \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1 \end{cases}$ met $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & x < 1. \end{cases}$