1 Eigenwaarden en eigenvectoren

1.1 Invoeren van de begrippen eigenwaarde en eigenvector

DEFINITIE 1.1.1 *Een complex (of reëel) getal λ heet een* eigenwaarde *van de $n \times n$ matrix A als er een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ is met $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Dan heet $\underline{x}$ een* eigenvector *van A (bij eigenwaarde λ).*

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$, dan is

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0$, dan is

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Interpretatie: A als afbeelding heeft in de richting van $\underline{x}$ een simpele vorm, namelijk oprekking met een factor λ.

Opmerking: als $\underline{x}$ een eigenvector is, dan is ook elk veelvoud van $\underline{x}$ een eigenvector bij dezelfde eigenwaarde, behalve de vector $\underline{0}$. Om niet elke keer de uitzondering van $\underline{0}$ mee te slepen, spreken we af dat we in de collectie van eigenvectoren bij een bepaalde eigenwaarde $\underline{0}$ wel meenemen.

Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A heeft drie eigenwaarden, te weten 1, 2 en 3.

De eigenvectoren bij 1 zijn alle vectoren van de vorm $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (of $\alpha \in \mathbb{C}$, al naar gelang we A als reële of complexe matrix zien).

De eigenvectoren bij 2 zijn alle vectoren van de vorm $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

De eigenvectoren bij 3 zijn alle vectoren van de vorm $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.2 Hoe we eigenwaarden en eigenvectoren vinden

Merk op, als $\underline{x}$ een eigenvector is, dan geldt $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, ofwel dan is

$$\left(A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \underline{x} = \underline{0}$$

dus $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$. Volgens een stelling uit het vorige hoofdstuk is dan $\det(A - \lambda I) = 0$, omdat $\underline{x} \neq \underline{0}$.
Omgekeerd, als $\det(A - \lambda I) = 0$, dan is er ook een $\underline{x} \neq \underline{0}$ zó dat $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$.

Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan is $\det(A - \lambda I) = = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$.

De eigenwaarden zijn dan dus $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ en $\lambda = 3$.

- Eigenvectoren bij $\lambda = 1$ krijg je door op te lossen:

  $$(A - 1 \cdot I)\underline{x} = \underline{0}, \text{ dus } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Oplossingen zijn de vectoren van de vorm $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Eigenvectoren bij -1: los op $(A - (-1) \cdot I) = \underline{0}$, dus

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to> \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

  waarvan de oplossingen zijn $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Eigenvectoren bij 3: los op $(A - 3 \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$, dus

  $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

  waarvan de oplossingen zijn $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

De vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$ heet de *karakteristieke vergelijking* van A.

Voorbeelden:

1. Een voorbeeld met complexe oplossingen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ geeft

   $$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \text{ geeft } \lambda = \pm i \text{ als eigenwaarden.}$$

   - Eigenvectoren bij i:

     $$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

     met oplossingen $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, met nu $\alpha \in \mathbb{C}$!

   - Eigenvectoren bij -i:

     $$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

     met oplossingen $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. Nu een 3×3 voorbeeld met complexe oplossingen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   geeft

   $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\{(1-\lambda)^2 + 4\}.$$

   $(1-\lambda)\{(1-\lambda)^2 + 4\} = 0$ geeft $\lambda = 1$ of $\lambda = 1 \pm 2i$.

   - Eigenvectoren bij eigenwaarde 1:
     $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ oplossen geeft $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

   - Eigenvectoren bij eigenwaarde $1 + 2i$: $\begin{pmatrix} -2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{pmatrix}$

     oplossen geeft $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

   - Eigenvectoren bij $1 - 2i$: $\begin{pmatrix} 2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$ oplossen geeft

     $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

In al onze voorbeelden hierboven hadden we een $n \times n$ matrix met n verschillende eigenwaarden. Dat hoeft natuurlijk niet altijd zo te zijn.

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ heeft één eigenwaarde: 1, en elke vector is eigenvector.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ heeft één eigenwaarde: 0, en alleen $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, zijn eigenvectoren.

Laat nu A een $n \times n$ matrix zijn met n verschillende eigenwaarden: λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n. Kies eigenvectoren $\underline{x}_i$ met $A\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Vorm de matrix S die je krijgt door $\underline{x}_i$ op de i-de kolom te zetten:

$$S = (\underline{x}_1 \;\; \underline{x}_2 \;\; \ldots \;\; \underline{x}_n).$$

Dan :

$$A \cdot S \;=\; (A\underline{x}_1 \;\; A\underline{x}_2 \;\; \ldots \;\; A\underline{x}_n) \;=\; (\lambda_1\underline{x}_1 \;\; \lambda_2\underline{x}_2 \;\; \ldots \;\; \lambda_n\underline{x}_n) \;=\; S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bovendien is S inverteerbaar (dat bewijzen we niet).

Een matrix die alleen maar niet-nul getallen op z'n hoofddiagonaal heeft noemen we een diagonaalmatrix.

Voorbeeld:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Eigenwaarden: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2)$.

Dus 2 en 5 zijn eigenwaarden. Eigenvectoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is eigenvector bij 5, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is eigenvector bij 2.

Vorm $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dan geldt: $AS = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Dus: $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

NB: S is inverteerbaar, want det$S$=-3.

We merken nog het volgende op: A en A^T hebben dezelfde eigenwaarden (maar niet dezelfde eigenvectoren natuurlijk). Verder, als een complex getal λ een eigenwaarde is van de (complexe) matrix A, dan is $\bar{\lambda}$ een eigenwaarde van A^*. Tenslotte hebben we de volgende belangrijke stelling:

STELLING 1.2.1 *Als A een zelfgeadjungeerde $n \times n$ matrix is dan zijn alle eigenwaarden van A reëel, en de eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden staan loodrecht op elkaar. Verder zijn er vectoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ die loodrecht op elkaar staan, en reele getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ zo dat $A\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i$, en de matrix $S = (\underline{x}_1 \cdots \underline{x}_n)$ is inverteerbaar. In dit geval hebben we dus $AS = SD$ met D de diagonaalmatrix met λ_1 tot en met λ_n op de diagonaal.*

Voorbeeld:

Neem als voorbeeld de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ga na dat de eigenwaarden 3 en -1 zijn, met bijbehorende eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, respectievelijk. Het inproduct $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ is nul, dus staan deze vectoren inderdaad loodrecht op elkaar.

---

2 Lineaire dv van orde 2 met constante coefficienten

2.1 Homogene vergelijkingen

We bekijken eerst homogene vergelijkingen van orde twee met constante coefficienten, d.w.z. dv's van de vorm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Probeer eerst eens of $y(x) = e^{\lambda x}$ een oplossing kan zijn voor een of ander getal λ. Invullen geeft

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = (a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0,$$

voor alle x. Dat kan alleen als

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Deze kwadratische vergelijking in λ heet de *karakteristieke vergelijking.* We weten dat deze vergelijking in het algemeen twee, eventueel complexe, oplossingen heeft. Deze oplossingen zullen we voor nu even noteren met λ_1 en λ_2. Een gevolg van een algemene stelling is dat als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking gegeven door $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, met c_1, c_2 willekeurige constanten.

Voorbeelden:

1. $y'' - y = 0$. Probeer $y = e^{\lambda x}$. De karakteristieke vergelijking wordt $\lambda^2 - 1 = 0$, dus $\lambda = \pm 1$. De algemene oplossing is dus $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, met c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

2. $y'' + 3y' + 2y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$, dus $\lambda = -2$ of $\lambda = -1$.
   De algemene oplossing is dus $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$, met c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

3. $y'' + y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 1 = 0$, dus $\lambda = \pm i$. Alle *complexe oplossingen* worden dan gegeven door

   $$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}, \text{ met } c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}.$$

   Nu is $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Dus

   $$y(x) = (c_1 + c_2) \cos x + i(c_1 - c_2) \sin x.$$

   Neem nu $c_1 + c_2 = a \in \mathbb{R}$ èn $i(c_1 - c_2) = b \in \mathbb{R}$. Dat kan, bijvoorbeeld $c_1 = \overline{c_2}$ werkt. Dan $y(x) = a \cos x + b \sin x$ met a, $b \in \mathbb{R}$ is de algemene *reële oplossing.*

4. $y'' + 2y' + y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, dat geeft $\lambda = -1$. Er is nu maar één oplossing van de vorm $y(x) = e^{\lambda x}$, namelijk $y = ce^{-x}$.

   Nu vinden we de andere oplossingen door variatie van constanten. Stel $y(x) = c(x)e^{-x}$ is een oplossing. Dan

   $$\begin{aligned} y' &= c' e{-}x - ce^{-x} \\ y'' &= (c'' e^{-x} - c' e^{-x}) - (c' e^{-x} - ce^{-x}) = c'' e^{-x} - 2c' e^{-x} + ce^{-x}. \end{aligned}$$

   Dus

   $$y'' + 2y' + y = (c'' - 2c' + c + 2c' - 2c + c)e^{-x} = c'' e^{-x} = 0,$$

   zodat $c'' = 0$. Dat betekent $c(x) = ax + b$, met a, $b \in \mathbb{R}$. Dus

   $$y(x) = axe^{-x} + be^{-x} \qquad \text{met } a, b \in \mathbb{R}.$$

   Dat is altijd zo: als er maar één oplossing van de karakteristieke vergelijking is, zeg λ_1, dan is naast $e^{\lambda_1 x}$ ook $xe^{\lambda_1 x}$ een oplossing.

2.2 Inhomogene vergelijking

We bekijken nu vergelijkingen van de vorm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Eerst doen we een algemene bewering: als $y_0(x)$ één oplossing van de inhomogene vergelijking is en $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de algemene oplossing van de homogene vergelijking

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

dan is de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking gegeven door

$$y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dat is leuk, omdat we nu maar één oplossing van de inhomogene vergelijking hoeven te vinden, maar hoe doe je dat dan? Voordat we daar wat over zeggen merken we op dat die ene oplossing van de inhomogene vergelijking een particuliere oplossing heet. Hoe vind je zo'n particuliere oplossing?

- Er is een algemene methode (ook nu weer variatie van constanten geheten), maar die is ingewikkeld.
- Voor veel functies f werkt het volgende idee: probeer voor y_0 lineaire combinaties van $f, f', f'', \ldots$.

We illustreren dit met wat voorbeelden

Voorbeelden:

1. Los op $y'' - y = x$. Probeer als particuliere oplossing $y = ax + b$. Invullen geeft (omdat $y'' = 0$) $y'' - y = -ax - b = x$, dus $b = 0$, $a = -1$.
   De algemene oplossing is dus $y(x) = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

2. $y'' + y' = \cos x$. Probeer voor y een functie van de vorm $y = a\cos x + b\sin x$. Dan is $y'' = -a\cos x - b\sin x$, en $y' = -a\sin x + b\cos x$. Dus

   $$y'' + y' = (-a + b)\cos x - (a + b)\sin x = \cos x,$$

   wat geeft $a + b = 0$, $-a + b = 1$. Oplossen van dit stelsel geeft $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Dus is $-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$ een oplossing. De oplossing van de homogene vergelijking krijg je zoals gewoonlijk door de karakteristieke vergelijking op te lossen: $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ geeft $\lambda = 0$ of $\lambda = -1$. De algemene oplossing is dus

   $$y(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + c_1 e^{-x} + c_2 \qquad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' - y = e^x$. Nu werkt ae^x natuurlijk niet als particuliere oplossing omdat dit al een oplossing van de homogene vergelijking is. Probeer in zulke gevallen echter $axe^x = y(x)$. Dan

   $$y' = axe^x + ae^x,\ y'' = axe^x + 2ae^x,$$

dus $y'' - y = 2ae^x = e^x$, geeft $a = \frac{1}{2}$.

Een particuliere oplossing is dus $y(x) = \frac{1}{2}xe^x$, zodat de algemene oplossing wordt

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x} \qquad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Laten we het recept voor het oplossen van een inhomogene lineaire dv samenvatten

1. Los de bijbehorende homogene dv op.
2. Vind een particuliere oplossing bijvoorbeeld met de methode zoals boven beschreven.
3. Los de constanten in de algemene oplossing op d.m.v. rand- of beginvoorwaarden (indien die aanwezig zijn).

Van dat laatste geven we nog een voorbeeld:

Los op $y'' + y' = \cos x$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$. We weten al dat de algemene oplossing is $y(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + c_1e^{-x} + c_2$. Invullen van $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$ geeft $0 = -\frac{1}{2} + c_1 + c_2$ en $0 = \frac{1}{2} - c_1$. Dus $c_1 = \frac{1}{2}$ en $c_2 = 0$. De gezochte oplossing is dus

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

We merken tenslotte op dat de technieken die hier gebruikt zijn ook werken voor de algemenere situatie van een n-de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficienten.

3 Opgaven

Men zoekt een particuliere oplossing $\phi(x)$ van de lineaire d.v. $ay'' + by' + cy = f(x)$. welke gedaante van $\phi(x)$ (met onbepaalde coëfficienten) probeert u , als:

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x) = x^3 + \sin 2x \\ (b) & f(x) = xe^{2x} \\ (c) & f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 1 \\ (d) & f(x) = e^x \sin 2x \end{array}$$

Bepaal de algemene oplossing:

$$
\begin{array}{rl}
(e) & y'' - 2y' - 3y = 0 \\
(f) & y'' - 4y' + 13y = 0 \\
(g) & y'' + 2y' + y = 0 \\
(h) & y'' + 2y = 0 \\
(i) & y'' + 2y' - 8y - 4x^2 = 0 \\
(j) & y'' = 3e^x + 4y + 8 + \sin x \\
(k) & \ddot{x} + \dot{x} = 2t\sin t - \cos t \qquad \left[\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right]
\end{array}
$$

Los de volgende beginwaardeproblemen op:

$$
(l) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y'' - 3y' + 2y & = & 0 \\ y(0) & = & y'(0) = 0 \end{array} \right.
$$

$$
(m) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x} - x & = & 2\cos t - 2t\sin t \\ x(0) & = & 0 \qquad \dot{x}(0) = 1 \end{array} \right.
$$