De golfvergelijking in drie dimensies

In drie dimensies wordt de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$$

waar c een constante is die de snelheid van de golven aangeeft. Dit is de golfvergelijking in "gewone" coördinaten x, y, z. Voor sommige problemen is het handiger om in cylinder- of bolcoördinaten te werken.

Je hebt al gezien (in de eerste week bij Optica) dat we de golfvergelijking kunnen omzetten naar cylindercoördinaten. Dus, we gebruiken poolcoördinaten in het x, y-vlak:

$$x = r \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi.$$

Voer ook even in (om het onderscheid duidelijk te maken)

$$F(r, \varphi, z, t) = \Psi(x, y, z, t).$$

We krijgen dan (vergelijk Adams, paragraaf 12.5)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right).$$

Golfvergelijking in een dimensie: trillende snaar

We concentreren ons eerst op de golvergelijking in een dimensie: we bekijken een functie $u(x, t)$ die voldoet aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Laten we eens kijken of we simpele oplossingen kunnen vinden, met name oplossingen van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$. Daarin zijn de variabelen gescheiden, de bijbehorende techniek heet dan ook *scheiding van variabelen.*

Invullen van $u(x, t) = X(x)T(t)$ geeft twee gewone differentiaalvergelijkingen voor X en T. Immers $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$, dus

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Omdat links een functie van alleen x staat, en rechts een functie van alleen t, moeten beide zijden wel dezelfde constante zijn. Omdat we verwachten dat T een periodieke functie zal zijn, nemen we die constante negatief, dat leidt tot

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = 0.$$

Dat geeft oplossingen voor $T(t)$ die lineaire combinaties zijn van $\cos(\omega t)$ en $\sin(\omega t)$ en voor $X(x)$ oplossingen die lineaire combinaties zijn van $\cos(\frac{\omega}{c}x)$ en $\sin(\frac{\omega}{c}x)$:

$$u(x,t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))(C\cos(\frac{\omega}{c}x) + D\sin(\frac{\omega}{c}x)).$$

Als we geïnteresseerd zijn in trillingen van een snaar van lengte l die aan beide zijden vast zit, dan zijn er randvoorwaarden:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

Invullen daarvan in $u(x,t)$ laat zien dat $C = 0$ en dat we alleen te maken hebben met heel bepaalde waarden van ω die zo zijn dat $\sin(\frac{\omega}{c}l) = 0$. Dus

$$\omega = \frac{c}{l}n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Die getallen heten de *eigenwaarden* van het probleem. Samenvattend hebben we dan dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elk paar getallen $A, B \in \mathbb{R}$ de functie

$$u_n(x,t) = (A\cos(\frac{cn\pi}{l}t) + B\sin(\frac{cn\pi}{l}t))\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

een oplossing is van de golfvergelijking in een dimensie die voldoet aan de randvoorwaarden $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. We merken op dat een eindige som van dit soort functies óók voldoet aan de golfvergelijking en aan de randvoorwaarden (het *superpositie* principe, dat volgt uit het feit dat de vergelijking en de randvoorwaarden samen lineair zijn).

Willen we nu ook nog eisen opleggen aan de beginvoorwaarden (dus de vorm van de functies $u(x,0)$ en $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$), dan leidt dat ons tot de theorie van Fourier reeksen. We proberen dan immers een *oneindige superpositie* van oplossingen als hierboven:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(\frac{cn\pi}{l}t) + b_n\sin(\frac{cn\pi}{l}t))\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

We zoeken a_n en b_n zo dat voor $0 \leq x \leq l$:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{cn\pi}{l}\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Daar staan twee Fourier reeksen (in feite sinusreeksen op $[0,l]$). Het lijkt dan goed even wat te herhalen over Fourier reeksen.

Fourierreeksen: herhaling

Laat $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ een functie zijn. De Fourierreeks van f is de reeks

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

waar

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Merk op dat dat er wat anders uitziet dan je misschien gewend bent of eerder gezien hebt (we gebruiken $a_0/2$ waar anderen soms a_0 gebruiken). Dat heeft later (bijvoorbeeld in Parseval's stelling) ook gevolgen, dat soort stellingen ziet er ook wat anders uit dan je gewend bent.

Convergentie van de Fourierreeks is gegarandeerd voor functies die voldoen aan de condities van Dirichlet: als f een eindig aantal maxima en minima heeft, en een eindig aantal sprong-discontinuïteiten en als f integreerbaar is op $[-\pi, \pi]$, dan convergeert de Fourierreeks van f naar $f(x)$ op punten x waar f continu is, en naar het gemiddelde van de linker en rechter limiet van f op punten waar f een sprong maakt. (Dit is inclusief de randpunten $-\pi$ en π als we f 2π-periodiek voortzetten.)

Differentiatie van Fourierreeksen mag niet zo maar termsgewijs. Maar, als f een 2π-periodiek is en continu is voor alle x, en f' voldoet aan de voorwaarden van Dirichlet hierboven, dan geeft termsgewijze differentiatie van de Fourierreeks van f je de Fourierreeks van f'.

De complexe vorm van de Fourierreeks is

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

waar de coëfficiënten c_n gegeven worden door

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Het verband tussen de c_n's, de a_n's en de b_n's wordt gegeven door

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad c_n = \tfrac{1}{2}(an - ib_n),$$
$$b_n = ic_n - ic_{-n}, \qquad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(an + ib_n).$$

Voorts is handig de stelling van Parseval: als $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$ eindig is, dan geldt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Een sinusreeks voor een functie f die gegeven is op een interval van de vorm $[0,\pi]$ krijgen we door uit f een oneven functie te maken die gedefinieerd is op het interval $[-\pi,\pi]$ en daarvan de Fourierreeks te nemen. Maak dus

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Dan krijgen we de sinusreeks voor f als volgt

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

met

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Willen we dit op een interval met andere lengte, zeg $f : [0,l] \to \mathbb{R}$, dan moeten we alleen even een substitutie uitvoeren om te komen tot

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

waar

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx.$$

Voor cosinusreeksen doe je iets soortgelijks, alleen in plaats van f voort te zetten tot een oneven functie, zet je f voort tot een even functie.

Opgaven.

1. Bepaal de Fourierreeksen op $[-\pi,\pi]$ van de volgende functies:

(a) $f(x) = 1,\ -\pi < x < pi,$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3 & -\pi < x < 0, \\ -3 & 0 \le x \le \pi \end{cases},$

(c) $f(x) = x^2 + 1,\ -\pi < x < pi,$

(d) $f(x) = \cos^2 s,\ -\pi < x < pi,$

(e) $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$,

(f) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ \sin^2 x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

2. Bepaal de complexe Fourierreeks van e^{2x}, en gebruik dat om de reële Fourierreeks van e^{2x} te vinden.

3. Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

(a) Voor welke waarde van $x \in [-\pi, \pi]$ geldt dat $f(x)$ niet gelijk is aan de som van de Fourierreeks van f? Wat is in dat punt de som van de Fourierreeks?

(b) Laat zien dat voor $0 < x \leq \pi$ geldt dat

$$\begin{aligned} \pi = x = & \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{\pi \cdot 3^2}\cos 3x + \frac{2}{\pi \cdot 5^2}\cos 5x + \cdots \\ & + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots . \end{aligned}$$

(c) Wat is de som van de reeks voor $x = 0$? Gebruik dat om te laten zien dat $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$. Laat ook zien dat hetzelfde resultaat kan worden verkregen door de som van de reeks te bekijken in $x = \pi$.

(d) Wat is de som van de reeks voor $x = \frac{1}{2}\pi$? Laat zien dat daarmee volgt dat $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$.

4. Gegeven is $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$.

(a) Bepaal getallen b_n zo dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$ voor $-\pi < x < \pi$.

(b) Neem $x = \frac{1}{2}\pi$, en laat zien dat $\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(2j+1)}{16j^2+16j+3}$.

Golfvergelijking in twee dimensies: trillingen van een rond membraan

We bekijken nu de trillingen van een rond membraan. Denk bijvoorbeeld aan een trommelvlies in het oor. Het membraan zit aan de rand vast. Dit is een tweedimensionaal analogon van een trillende snaar. We stellen de coördinaten in het membraan voor door x, y en de uitwijking door z, dan worden trillingen van het membraan beschreven door

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Het membraan zit vast aan de rand, dus $z(x, y) = 0$ voor $x^2 + y^2 = a^2$, waar a de straal van het membraan is. We nemen voor het gemak maar even $a = 1$

en $c = 1$. Niet erg fysisch relevant, maar het verheldert de structuur van het argument als we niet al die parameters meenemen.

De trillingen worden in poolcoördinaten beschreven door

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}. \tag{1}$$

We scheiden eerst de tijd- en plaatsvariabelen. Dus, we zoeken eerst eens oplossingen van de vorm $z = u(r,\varphi)T(t)$, waarbij we verwachten dat $T(t)$ periodiek is. Dat geeft:

$$T''(t) + k^2 T(t) = 0,$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0.$$

De vergelijking voor T levert op dat $T(t)$ een lineaire combinatie is van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$.

Voor de partiële differentiaalvergelijking voor u doen we weer scheiding van variabelen, we schrijven $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Dat levert op

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + k^2 R\Phi = 0.$$

Deel door $R\Phi$, vermenigvuldig met r^2 en breng de termen met Φ naar rechts om te zien dat

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + r^2k^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Rechts staat een functie van alleen φ, links een functie van alleen r. Die moeten dus constant zijn. Omdat φ een hoek is, verwachten we voor Φ een 2π-periodieke functie. We stellen dus

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2$$

waardoor $\Phi(\varphi)$ een lineaire combinatie wordt van $\sin(n\varphi)$ en $\cos(n\varphi)$. Hier is n een natuurlijk getal of nul.

Tenslotte, $R(r)$ voldoet aan de tweede orde differentiaalvergelijking

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2k^2 - n^2)R(r) = 0.$$

Dit is de *differentiaalvergelijking van Bessel.* Helaas, die heeft geen constante coëfficiënten, en is ook niet op een andere manier makkelijk op te lossen. Maar daar hadden we een truc op: we zoeken een oplossing die een machtreeks in r is.

Machtreeksoplossingen van de dv van Bessel

Voer even in $x = rk$, en $y(x) = R(x/k) = R(r)$. Dan is $y'(x) = R'(r)/k$, en $y''(x) = R''(r)/k^2$. De differentiaalvergelijking

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2k^2 - n^2)R(r) = 0.$$

gaat dan over in

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0.$$

Dat ziet er wat makkelijker uit, en de notatie is ook meer wat we gewend zijn.

Merk op, als $n\neq 0$ dan volgt $y(0)=0$. Probeer als machtreeksoplossing

$$y(x)=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

voor een of andere s, met $a_0\neq 0$. Dat wordt ingegeven door het feit dat we al zien dat $y(0)=0$. Het getal s is dus de orde van het nulpunt van y in 0. Het is handig om het volgende op te merken: $x^2y''+xy'=x(xy')'$. Als dan y gegeven wordt door de machtreeks hierboven, dan is

$$xy'=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}$$

en daarmee is

$$x(xy')'=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)^2a_nx^{n+s-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)^2a_nx^{n+s}.$$

Dat moet gelijk zijn aan $(n^2-x^2)y(x)$. Dus:

$$x(xy')'=s^2a_0x^s+(s+1)^2a_1x^{s+1}+(s+2)^2a_2x^{s+2}+(s+3)^2a_3x^{s+3}+\cdots$$
$$=(n^2-x^2)y=n^2a_0x^s+n^2a_1x^{s+1}+(n^2a_2-a_0)x^{s+2}+(n^2a_3-a_1)x^{s+3}+\cdots.$$

Vergelijk de coëfficiënten: omdat $a_0\neq 0$ volgt $s^2=n^2$ uit de coëffici—ent van x^s. Dus $s=\pm n$, en omdat we s groter dan nul verwachten (het is immers de orde van het nulpunt van y in 0) volgt $s=n$. Uit de coëfficiënt van x^{s+1} zien we dan dat $a_1=0$. Alle volgende coëfficiënten voldoen aan de recurrente betrekking:

$$n^2a_j-a_{j-2}=(s+j)^2a_j,$$

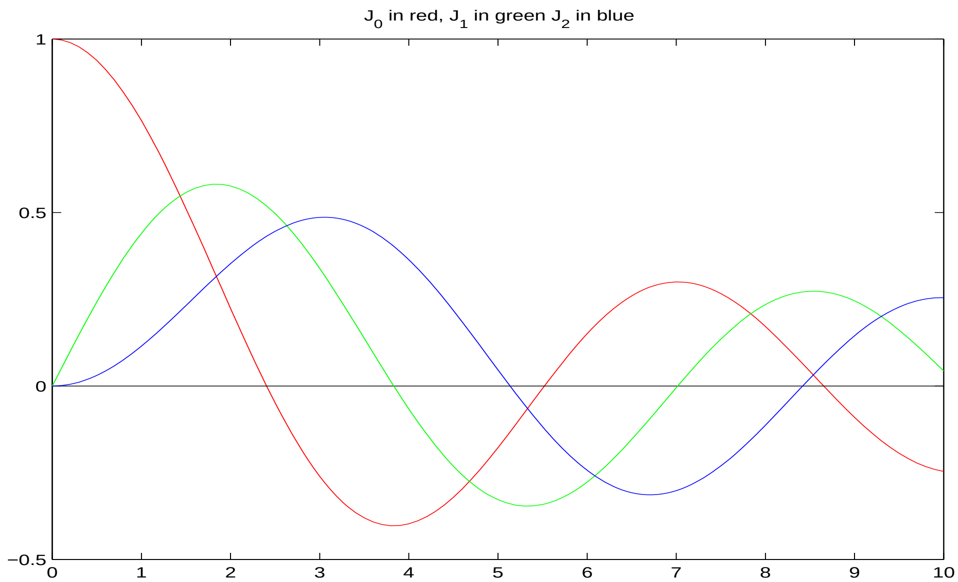
en omdat $s=n$ laat zich dat herschrijven als

$$a_j=-\frac{a_{j-2}}{(n+j)^2-n^2}=-\frac{a_{j-2}}{j^2+2jn}=-\frac{a_{j-2}}{j(j+2n)}.$$

Omdat $a_1=0$ volgt dat $a_j=0$ voor alle oneven j. Voor even j zijn alle a_j afhankelijk van de waarde van a_0. Na flink wat gereken, en met een handige keuze van a_0 volgt dan

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m+n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}.$$

Voor de grafieken van de functies J_0, J_1 en J_2 zie de onderstaande figuur



Er is nog veel meer over Bessel functies te vertellen, zie bijvoorbeeld het boek van N.M. Temme of de wikipedia pagina

`http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function`

In de optica spelen Bessel functies ook een rol, met name de functie $J_1(x)/x$, zie bijvoorbeeld

`http://en.wikipedia.org/wiki/Point_spread_function`

Voor gebruik bij het trillende membraan hebben we straks de nulpunten nodig van J_n. Het m'de nulpunt van J_n noteren we met k_{mn}. Wat gepuzzel met Matlab levert op dat de nulpunten die je in de bovenstaande figuur ziet tot op zes decimalen nauwkeurig gegeven worden door

k_{10}	2.404826	Nulpunten
k_{20}	5.520079	van J_0
k_{30}	8.653728	
k_{11}	3.831706	Nulpunten
k_{21}	7.015586	van J_1
k_{12}	5.135622	Nulpunten
k_{22}	8.417244	van J_2

Opgaven.

1. Laat zien dat $J_0'(x) = -J_1(x)$.

2. Laat zien dat $y(x) = \sqrt(x)J_0(x)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$y'' + (1 + \frac{1}{4x^2})y = 0.$$

Aanwijzing: stel $y = u\sqrt{x}$, en leid een differentiaalvergelijking voor u af. Je moet dan laten zien dat J_0 een oplossing is van die differentiaalvergelijking.
3. Laat zien dat $y(x) = \frac{J_1(x)}{x}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{3}{x}y' + y = 0.$$

4. Laat $y(x)$ een oplossing zijn van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Verder is gegeven dat $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

(a) Laat zien dat $y''(0) = 0$. Bepaal tevens $y'''(0)$.

(b) Toon aan dat

$$y^{(n+2)}(0) + (-2n - 1)y^{(n)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0, \qquad n \geq 2.$$

(c) Laat zien dat $y^{(2n)} = 0$ voor alle n.

(d) Bepaal $y^{(5)}(0)$.

5. Zij $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + x^2y' + xy = 0.$$

(a) Laat zien dat de getallen a_n voldoen aan de recurrente betrekking

$$a_{n+3} = -\frac{n+1}{(n+3)(n+2)}a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

en dat $a_2 = 0$.

(b) Neem $a_1 = 0$ en $a_0 = 1$. Laat zien dat in de MacLaurinreeks voor y alleen de termen met x^3, $x^6, x^9, \ldots$ en de constante termen voorkomen.

(c) Voor de situatie van het b-onderdeel, laat zien dat de MacLaurinreeks voor y convergeert voor alle x.

Terug naar een trillend membraan

We hebben inmiddels dat $z(r, \varphi, t) = u(r, \varphi)T(t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$ oplossingen zijn van de partiële differentiaalvergelijking (1) voor

$$T(t) = \begin{cases} \sin(kt) \\ \cos(kt) \end{cases},$$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{cases},$$

$$R(r) = J_n(kr).$$

Nu moet nog voldaan zijn aan de randvoorwaarde dat het membraan vast zit op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, dus op $r = 1$. Dan moet dus $J_n(k) = 0$. Vandaar dat we zo geïnteresseerd waren in de nulpunten van J_n. De getallen k_{mn} zijn de eigenwaarden van het probleem.

Algemene oplossingen zijn weer lineaire combinaties van dit soort functies. Daar gaan we verder niet op in.

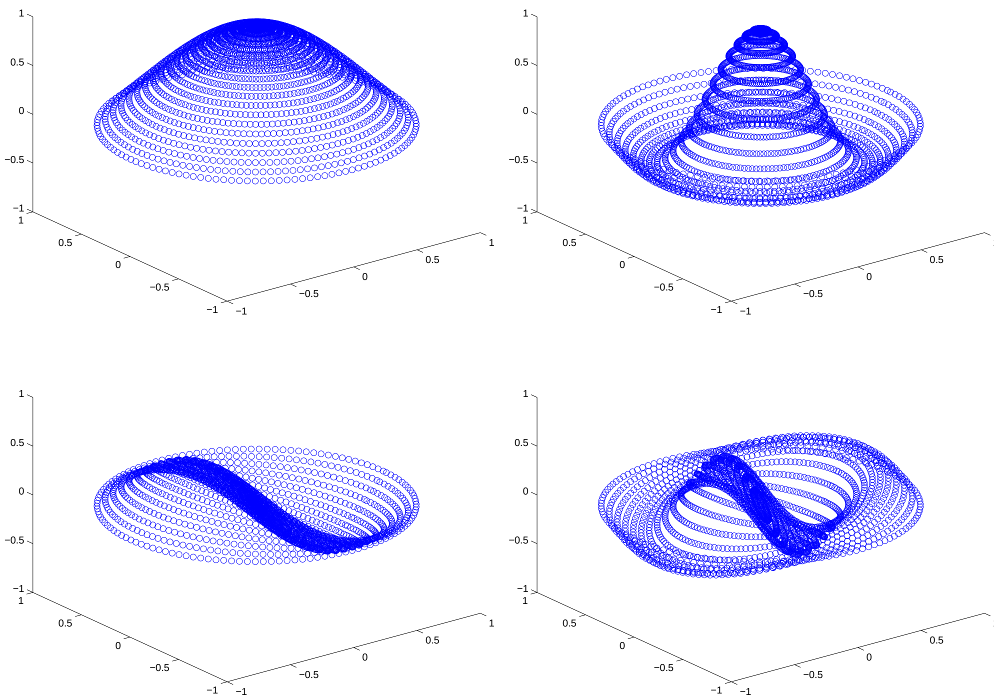
Kleine demonstratie met Matlab om de trillingen echt te kunnen zien.

```
k10=2.404826;
k20=5.520079;
k11=3.831706;
k21=7.015586;

n=0;
k=k10;
for t=0:0.1:2*pi/k
 for r=0:0.05:1
  for theta=0:0.05:2*pi
   x=r*cos(theta);
   y=r*sin(theta);
   z=besselj(n,k*r)*cos(n*theta)*cos(k*t);
   plot3(x,y,z)
   hold on
  end
 end
 axis([-1 1 -1 1 -1 1])
 pause(0.5)
 hold off
end

Herhaal dit met k=k20 en n=0, dan met k=k11 en n=1,
en tenslotte met k=k21 en n=1.
```

Een paar "stills" uit die demonstratie staan hieronder voor de respectievelijke waarden van k:



D'Alembert's oplossing

We keren nu even terug naar trillingen in één dimensie, dat wil zeggen naar de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Bekijk nu eens de functie $u_1(x,t) = g(x - ct)$, waar g een twee keer differentieerbare functie is. Voor die functie is makkelijk in te zien dat de tweede afgeleide naar x gelijk is aan $g''(x-ct)$, terwijl de tweede afgeleide naar t gelijk is aan $c^2 g''(x-ct)$. Dus is dit een oplossing voor elke tweemaal differentieerbare functie. Evenzo is $u_2(x,t) = h(x+ct)$ een oplossing voor elke tweemaal differentieerbare h. Dus

$$u(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct)$$

is een oplossing, voor elk paar functies g en h die tweemaal differentieerbaar zijn. Zulke oplossingen noemen we lopende golven. Merk op dat we hier geen beperkingen aan x opleggen: $x \in \mathbb{R}$, en dat $t > 0$.

Als we nu als beginconditie opleggen dat $u(x,0) = f(x)$, dan volgt dat $g(x) + h(x) = f(x)$. Dat bepaalt g en h niet uniek. We kunnen dus kennelijk nog een conditie opleggen. Dat kan bijvoorbeeld een conditie zijn op

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -cg'(x) + ch'(x).$$

Bekijken we eerst eens de voorwaarde dat dit nul is, dus $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. Dat geeft dat $g' = h'$, en dan is het verschil tussen g en h een constante, zeg $g(x) - h(x) = a$. We hebben nu een stelsel vergelijkingen voor $g(x)$ en $h(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= f(x), \\ g(x) - h(x) &= a. \end{aligned}$$

Dan is $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + a)$ en $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - a)$, en daarmee is

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)).$$

Voor het geval waar $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ niet nul is, maar een gegeven functie, en nog veel meer zaken die betrekking hebben op de ééndimensionale golfvergelijking, zie het boek van R. Knobel.

Literatuur

1. R.A. Adams and C. Essex: *Calculus, a complete course.* Seventh ed. Pearson, 2003.
2. M.L. Boas: *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* Third ed. Wiley, 2006.
3. J.W. Brown and R.V. Churchill: *Fourier Series and Boundary Value Problems.* Fifth ed. McGraw-Hill, 1993.
4. G. Stephenson: *Mathematical Methods for the Science Students.* Second ed. Longman, 1973.
5. R. Knobel: *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves.* Amer. Math. Soc., Student Math. Library, Vol. 3, 2000.

6 N.M. Temme: *Speciale functies in de mathematische fysica.* Epsilon uitgaven, 1990.

7 http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

8 http://en.wikipedia.org/wiki/Point_spread_function