Partiële differentiaalvergelijkingen en Fourierreeksen

R. van der Hout

1 Inleiding

Wij beginnen met een voorbeeld. We willen het temperatuurverloop $T(x,t)$ als functie van plaats x en tijd t vinden in een klompje materiaal met een gegeven begin-temperatuurverdeling, waarbij wij veronderstellen dat de rand (dwz het contact met de buitenwereld) deels geisoleerd is en deels, vanaf $t = 0$, op een vaste temperatuur wordt gehouden. Om de essentiële punten van de aanpak goed zichtbaar te maken, beperken wij ons tot een lange, dunne cirkelcilinder, waarvan de uiteinden op temperatuur $T = 0$ worden gebracht, terwijl de cilinderwand geïsoleerd wordt verondersteld. Met een beetje fantasie kun je wel aannemen dat de situatie ruimtelijk gezien in wezen ééndimensionaal is. Wij zullen de cilinder daarom representeren als de verzameling

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} : \; 0 < x < L\},$$

waar $x = 0$ en $x = L$ de punten zijn die van $t = 0$ af op temperatuur $T = 0$ zitten. Wij gaan niet op de fysica in, maar wij vermelden dat de temperatuur $T(x,t)$ een functie is van twee variabelen, nl. plaats x en tijd t, die voldoet aan de *warmtevergelijking*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Het getal $\lambda (> 0)$ heeft te maken met de mate waarin ons materiaal de warmte geleidt. Voor de goede orde: als λ niet constant is, luidt de vergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x}.$$

Wij zullen λ constant veronderstellen. Je ziet hier dat T afhangt van x en van t en dat de afhankelijkheden iets met elkaar te maken hebben: je hebt een partiële differentiaalvergelijking (PDV, PDE). Op zich beschrijft die vergelijking ons probleem zeker niet volledig. Intuïtief is dat wel duidelijk: wij hebben nog niet gespecificeerd dat de randtemperatuur vanaf $t = 0$ gegeven is, of hoe de temperatuurverdeling er op $t = 0$ uitziet: wij hebben nog rand- en beginvoorwaarden nodig. Daar komen wij later op terug.

Als je vergelijking (1) goed bekijkt, kun je een heel belangrijke eigenschap vaststellen: de vergelijking is **lineair**, wat inhoudt:

- als u een oplossing is en α een reëel getal, dan is αu ook een oplossing.
- Als $u_1, \cdots, u_n$ verschillende oplossingen zijn, dan is $v = u_1 + \cdots + u_n$ ook een oplossing.

Let wel: wij hebben het hier over willekeurige oplossingen van de warmtevergelijking, die niet noodzakelijk met de gewenste oplossing samenvallen. Vandaar de letter u in plaats van T.

Lineariteit is niet een toevalligheid die alleen bij (1) voorkomt. Heel veel partiële differentiaalvergelijkingen in de toegepaste wetenschappen zijn lineair, ook bijvoorbeeld de golfvergelijking en de Laplace-vergelijking (die o.a. iets te maken heeft met mechanische evenwichten).

Waarom is lineariteit belangrijk? Wij zullen dit weer schetsen aan de hand van ons warmte-probleem. Laten wij veronderstellen dat een beginfunctie gegeven is:

$$T(x, 0) = \psi(x).$$

Ons volledige probleem wordt nu

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} T_t = \lambda T_{xx} & (0 < x < L,\ t > 0), \quad \text{(a)} \\ T(0,t) = T(L,t) = 0 & (t > 0), \quad \text{(b)} \\ T(x,0) = \psi(x) & (0 < x < L). \quad \text{(c)} \end{cases}$$

Het is niet eenvoudig om de oplossing zomaar op te schrijven. Toch is het best mogelijk om oplossingen van vergelijking (1) te construeren, bijvoorbeeld

$$u_1(x,t) = x, \quad u_2(x,t) = e^{-\lambda t}\sin(x).$$

Maar daarmee voldoe je niet aan de extra voorwaarden. De idee is nu om speciale oplossingen te zoeken van het type

$$u(x,t) = f(x)g(t),$$

die in ieder geval aan de randvoorwaarden (b) in probleem (P) voldoen: $f(0) = f(L) = 0$. Om voor de hand liggende redenen wordt deze aanpak "scheiding van variabelen" genoemd. De functies f en g moeten voldoen aan

$$g'(t)f(x) = \lambda g(t) f''(x).$$

Aannemend dat $f(x)g(t) \neq 0$ delen wij door $f(x)g(t)$:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Dit ziet er grappig uit: links staat een functie van t, rechts een functie van x. En die functies zijn aan elkaar gelijk. Dat kan maar op één manier waar zijn:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \frac{f''(x)}{f(x)} = c,$$

met c constant. In het bijzonder heb je

$$f'' = \frac{c}{\lambda} f. \tag{2}$$

Als c positief is heb je $f(x) = \alpha e^{x\sqrt{\frac{c}{\lambda}}} + \beta e^{-x\sqrt{\frac{c}{\lambda}}}$. De randvoorwaarden geven nu $\alpha e^{L\sqrt{\frac{c}{\lambda}}} + \beta e^{-L\sqrt{\frac{c}{\lambda}}} = \alpha + \beta = 0$. Deze twee vergelijkingen hebben helaas maar één oplossing: $\alpha = \beta = 0$. Dit levert ons niets interessants op.

Laten wij eens proberen wat er gebeurt als $c = -\gamma^2$ negatief is. Uit (1) volgt dan dat $f(x) = \alpha \sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}x) + \beta\cos(\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}x)$. Omdat $f(0) = 0$ moet $\beta = 0$. En omdat $f(L) = 0$ moet $\sin(\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}L) = 0$, dus

$$\gamma = \frac{k\pi\sqrt{\lambda}}{L},\ k \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

(Waarom laten wij negatieve k-waarden weg?)

Met zo'n waarde voor γ vind je

$$g(t) = \sigma e^{\frac{-k^2\pi^2\lambda t}{L^2}}.$$

Wij vinden dus een (oneindig groot) stel "basisoplossingen" van (1) en (2) in probleem (P), van het type

$$u_k(x,t) = e^{\frac{-k^2\pi^2\lambda t}{L^2}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Eindige lineaire combinaties zijn in ieder geval ook oplossingen. De vraag is: is de oplossing van probleem (P) te schrijven als

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{-k^2\pi^2\lambda t}{L^2}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)? \tag{3}$$

Wat wij hier zien verschijnen is een *Fourierreeks*. De algemene gedaante is

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k \cos(k\beta x) + \beta_k \sin(k\beta x)).$$

Merk op dat wij in ons geval tijdsafhankelijke coëfficiënten hebben.

Laten wij aan de hand van het voorgaande een paar vragen formuleren.

1. Een lineaire combinatie van basisoplossingen is weer een oplossing. Je kunt niet verwachten dat zo'n *eindige* combinatie ons probleem oplost. Is het gerechtvaardigd om naar oneindige sommen te kijken?

2. Kun je verwachten dat een uitdrukking als (3) een kans maakt om oplossing te zijn?

   In ieder geval zou je dan willen dat het op het begintijdstip $t = 0$ in orde is. Dat impliceert dat zou moeten gelden:

   $$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

   Nu hebben wij aan ψ vooralsnog geen eisen opgelegd. Onze derde vraag wordt dus

3. Welke functies, gegeven op een interval van lengte L, kun je in een "sinusreeks" ontwikkelen, zodanig dat alle termen φ_k periodiek zijn in de zin dat $\varphi_k(x + 2L) = \varphi_k(x)$ voor alle x en alle gehele $k \geq 0$? De naam "sinusreeks" wordt overigens inderdaad gebruikt. Algemener:

4. Welke functies, gegeven op een interval, kun je in een Fourierreeks met passende periode ontwikkelen? En:

5. In hoeverre zijn zulke ontwikkelingen uniek?

Dit zijn de onderwerpen die in het vervolg aan bod gaan komen. Het zal blijken dat vrijwel alles wat je wilt mogelijk is. En de bijbehorende berekeningen zijn in principe eenvoudig. En je kunt vaak tot een goede benadering komen door slechts een paar termen in de reeks echt mee te nemen. Kijk maar wat er gebeurt als de coëfficiënten in (3) begrensd zijn (wat steeds zo is) en k (het "nummer" van de term) groot is.

Opgaven

1. In probleem (P) hebben wij de randvoorwaarden $T(0,t) = T(L,t) = 0$ opgelegd. Dat is nogal een beperking. Geef aan hoe je de algemenere voorwaarden

   $$T(0,t) = a; \quad T(1,t) = b \quad (a \text{ en } b \text{ vast})$$

   kunt behandelen.

2. Zelfde vraag, maar nu met de randvoorwaarden

   $$T_x(0,t) = 0; \quad T(L,t) = 1.$$

3. Zelfde vraag, met de randvoorwaarden

   $$T_x(0,t) = T_x(L,t) = 1.$$

2 Periodieke functies en Fourierreeksen

In deze sectie bekijken wij functies op $\mathbb{R}$, die periodiek zijn met periode 2π. Om precies te zijn: wij bekijken functies die voldoen aan de eis

$$f(x + 2\pi) = f(x), \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

De reden dat wij voor een periode 2π kiezen is de eenvoud in de notatie. Periodieke functies f met een andere periode T kunnen makkelijk in het 2π kader behandeld worden via de transformatie

$$g(x) = f(\frac{Tx}{2\pi}).$$

Ga zelf na dat g nu 2π-periodiek is!

Wij zullen onze functies steeds bekijken op het interval $-\pi \leq x \leq \pi$ (ieder ander interval van lengte 2π zou het even goed doen, trouwens). Bekende voorbeelden van 2π-periodieke functies: $\sin kx$ en $\cos kx$, met k geheel, en natuurlijk de lineaire combinaties:

$$\sum_{k=0}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ook netjes convergerende oneindige "Fourierreeksen"

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

moeten in onze klasse terecht komen.

Het is goed om even terug te gaan naar de warmtevergelijking. Een vraag die wij ons stelden was: kun je de "beginfunctie" ψ schrijven als een sinusreeks? Laten wij voor het gemak veronderstellen dat het interval waarop wij werken precies $[0, \pi]$ is (hoe zou je de transformatie $L \to \pi$ uitvoeren?). Als je ψ schrijft als sinusreeks: $\psi(x) = \sum \alpha_k \sin kx$, dan heb je ψ in feite uitgebreid tot een 2π-periodieke functie die overal gedefinieerd is. **Maar let op**: iedere $\sin kx$ is een oneven functie (d.w.z. een functie g die voldoet aan $g(x) = -g(-x)$ voor alle x). In het bijzonder geldt voor zulke functies dat

$$g(0) = 0 \quad \text{en} \quad g(-\pi) = -g(\pi).$$

Maar hoe zit dat met onze beginfunctie ψ? Wij hebben niet gezegd dat $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ en dat willen wij ook niet opleggen: de beginfunctie hoeft niet aan de later opgelegde randvoorwaarden te voldoen. Maar de onevenheid en periodiciteit van de sinussen legt dat wel op. Wij moeten concluderen:

Als de sinusreeks naar ψ convergeert, dan kan dat alleen op het "inwendige" $0 < x < \pi$ goed gaan, in de randpunten levert de sinusreeks een waarde $= 0$ op. Maar als dat inderdaad zo gaat (en dat is zo!), dan is de som van de sinusreeks niet continu. Wij krijgen hier op ons brood dat onze beginfunctie niet aan de randvoorwaarden hoeft te voldoen. Je kunt bewijzen dat alles goed gaat, maar daar gaan wij hier niet op in.

2.1 Fourierontwikkeling van 2π-periodieke functies

In deze sectie bekijken wij begrensde functies op het interval $[-\pi, \pi]$, die *stuksgewijs continu* zijn:

Definitie *Een begrensde functie f, gedefinieerd op een interval $a \leq x \leq b$, heet* **stuksgewijs continu** *onder de volgende voorwaarden:*

- *Er zijn eindig veel punten $a = x_0 < x_1 < \cdots x_N = b$ zijn zo, dat f continu is op alle deelintervallen $x_i < x < x_{i+1}$;*
- *Alle (relevante) linker- en rechterlimieten*

  $$\lim_{x \uparrow x_i} f(x), \ \lim_{x \downarrow x_i} f(x)$$

  bestaan.

Wij hebben daarnet aannemelijk gemaakt dat een Fourierontwikkeling (een sinusreeks in dit geval) geen continu resultaat hoeft op te leveren. De klasse van continue functies is dus eigenlijk geen handige klasse om Fourierreeksen in te construeren. Stuksgewijs continue functies zijn handiger. In het vervolg zullen wij een stuksgewijs continue functie f op $[-\pi, \pi]$ nog iets aanpassen en dan uitbreiden tot een 2π-periodieke functie, die stuksgewijs continu is op ieder interval. Dat gaat als volgt.

Laat f een stuksgewijs continue functie zijn met domein $[-\pi, \pi]$, definieer dan $\hat{f}$ op $[-\pi, \pi]$:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\lim_{x \downarrow -\pi} f(x) + \lim_{x \uparrow \pi} f(x)}{2} & \text{als } x = \pm\pi, \\ \frac{\lim_{x \downarrow x_i} f(x) + \lim_{x \uparrow x_i} f(x)}{2} & \text{als } \ x = x_i \ (i = 1, \cdots, N-1), \\ f(x) & \text{anders} \end{cases}$$

Vervolgens zetten wij $\hat{f}$ periodiek voort tot de hele $I\!R$. Het is duidelijk (?) dat $\hat{f}$ een begrensde, periodieke en (op ieder eindig interval) stuksgewijs continue functie is. Het is goed om de constructie van $\hat{f}$ vanuit f goed te begrijpen: het zal blijken dat *de Fourierreeks van f naar $\hat{f}$ convergeert* (als hij convergeert).

Opmerking: In het vervolg zullen wij stuksgewijs continue functies integreren. Het is bekend dat je continue begrensde functies over een interval kunt integreren. Voor stuksgewijs continue functies is het recept: integreer over de deelintervallen waar de functie continu is en tel de resultaten op.

Het wordt nu tijd om de Fourierontwikkeling van 2π-periodieke functies nu daadwerkelijk aan te gaan pakken. Wij zullen eerst behandelen hoe je de coëfficiënten kunt uitrekenen. Daartoe hebben wij een hulpstelling nodig:

Stelling 2.1 *Laat m en n niet-negatieve gehele getallen zijn. Dan geldt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi\delta_{mn} \quad \text{als } m, n > 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{mn} \quad \text{als } m, n > 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

Hier is δ_{mn} de Kronecker-delta:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{als } m = n, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Het bewijs van deze stelling laten wij aan de lezer over.

Veronderstel nu dat f een 2π-periodieke functie is, die Fourier-ontwikkelbaar is:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Let op de hoed!! Wij berekenen nu $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] dx = 2\pi a_0.$$

Wij hebben hier stilzwijgend integreren en sommeren verwisseld. Daar moet je altijd wat mee oppassen, maar hier (en in het vervolg) gaat het goed. Dus

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{4}$$

Op dezelfde manier voor $k > 0$, met Stelling (2.1),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx dx = a_k \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin^2 kx dx = b_k \pi.$$

Dus

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \tag{5}$$

Het is blijkbaar, afgezien van het berekenen van de integralen in (4) en (5), niet erg moeilijk om een Fourierreeks te construeren. De vraag is natuurlijk: convergeert die reeks inderdaad naar $\hat{f}$? Hier geldt de volgende

Stelling 2.2 *Laat f een stuksgewijs continue, 2π-periodieke functie zijn. Dan convergeert de Fourierreeks $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, met a_k en b_k als in Stelling 2.1, naar $\hat{f}(x)$ voor alle x waarvoor de linker- en rechterafgeleiden*

$$f'(x^-) := \lim_{\tilde{x}\uparrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x_i}, \quad f'(x^+) := \lim_{\tilde{x}\downarrow x} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}$$

bestaan.

Merk op: als je een eindige deelsom zou nemen, zou je een continue functie krijgen. Dat impliceert dat, als f niet continu is, iedere *eindige* som voor sommige x-waarden geen goede benadering kan geven!

Voorbeeld Laat

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \\ -1 & \text{als } (2k-1)\pi < x < 2k\pi, \end{cases}$$

Dan geldt

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x.$$

Reken dit zelf na!! Waarom convergeert deze reeks in $x = \frac{\pi}{2}$? Bereken zelf (met Maple of zo) de grafieken van een paar eindige sommen.

2.1.1 Opgaven

1. Bewijs Stelling 2.1.
2. Bewijs: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
3. Geef vergelijkbare formules voor $\cos x + \cos y$ en $\cos x + \sin y$.
4. Bepaal of de volgende functies periodiek zijn. Zo ja, geef de periode
   (a) $f_1(x) = \sin 3x$,
   (b) $f_2(t) = 3\cos 2x + 5 \sin 3x$,
   (c) $f_3(x) = \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
5. Bepaal de Fourierreeksen op $[-\pi, \pi]$ van de volgende functies:
   (a) $f_1(t) = 1, \quad -\pi < t < \pi$.
   (b) $f_2(x) = \begin{cases} 3 & -\pi < x < 0, \\ -3 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$.
   (c) $f_3(x) = x^2 + 1, \quad -\pi < x < \pi$.
   (d) $f_4(x) = \cos^2 x, \quad -\pi < x < \pi$.
   (e) $f_5(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$.
   (f) $f_6(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ \sin^2 x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

6. Laat f een stuksgewijs continue functie zijn, periodiek met periode T, dwz $f(x+T) = f(x)$ voor alle x. Bewijs dat

$$G(a) := \int_a^{a+3T} f(s)ds$$

onafhankelijk is van a.

7. Als, in bovenstaande opgave, f continu en begrensd is, kun je het resultaat hierboven direkt vinden door in te zien dat $G'(a) = 0$ voor alle a. Hoe voer je die differentiatie uit?

8. Het is bekend dat $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Gebruik dit om af te leiden dat

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

9. Laat zien dat $e^{e^{ix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$ Leid daaruit de 2π periodieke Fourierreeks van

$$g(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x)$$

af.

2.2 Een paar eigenschappen van Fouriercoëfficiënten

Laat f een stuksgewijs continue, 2π-periodieke, functie zijn. Met $S_N(x)$ zullen wij de afgekapte Fourierreeks

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

aanduiden, met a_k en b_k als in Stelling 2.1. Wij hebben dan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)^2 dx.$$

Hieruit volgt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{N} (a_k^2 + b_k^2).$$

(Hoe zie je dat?) Hieruit concludeer je direct dat

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx,$$

de **ongelijkheid van Bessel**. In het bijzonder volgt hieruit dat

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Voor de functies die wij bekijken geldt nog een verscherping van de ongelijkheid van Bessel: de **gelijkheid van Parseval**:

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx. \tag{6}$$

Een interessant voorbeeld: Als $f(x) = x$ voor $-\pi < x < \pi$, dan geldt

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Parseval levert dat $4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$. Wij hebben dus het bekende resultaat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aan dit voorbeeld kun je direct een waarschuwing ontlenen. Je kunt je afvragen of je een Fourierreeks term voor term kunt differentiëren en zo de Fouriereeks voor f' krijgt. Hier zou dat betekenen dat $\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos nx = 1$, wat duidelijk onzin is (waarom?). Je moet dus voorzichtig zijn. Voor de volledigheid vermelden wij een resultaat op dit gebied:

Stelling 2.3 *Als f tweemaal continu differentieerbaar is en 2π-periodiek, dan is zijn Fourierreeks term voor term differentieerbaar:*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Opgave *Waar gaat het mis met de differentieerbaarheid van de Fourierreeks van $f(x) = x$?*

Wat *integreren* betreft, daar zijn de resultaten simpeler. Zo geldt

Stelling 2.4 *Laat f stuksgewijs continu zijn op $(-\pi, \pi)$ Onafhankelijk van de vraag of de Fourierreeks convergeert, geldt dat*

$$\int_{-\pi}^{x} f(s)ds = a_0(x + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k(\cos kx + (-1)^{n+1})}{k}.$$

Dus: je mag term voor term integreren.

2.3 Fourierreeksen met andere periodes

Tot nu toe hebben wij steeds 2π-periodieke functies bekeken. Veronderstel dat wij iets dergelijks willen doen voor functies die $2L$-periodiek zijn. Natuurlijk verder met dezelfde eigenschappen. In principe kun je de theorie opnieuw opbouwen (dat is niet moeilijk), maar het is natuurlijk handig als wij kunnen gebruiken wat wij al gedaan hebben. Dat kan, op grond van de volgende triviale stelling:

Stelling 2.5 *Als $f(x)$ een $2L$-periodieke functie is, dan is $g(x) := f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)$ een 2π-periodieke functie.*

Blijkbaar geldt voor voldoend nette f (zie Stelling 2.2)

$$\hat{f}\left(\frac{Lx}{\pi}\right) = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

met a_k en b_k zoals in (4) en (5). Dus

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \tag{7}$$

en voor $k > 0$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \cos kx dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \tag{8}$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \tag{9}$$

Blijkbaar heb je, met deze coëfficiënten,

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).$$

De differentieerbaarheids- en integreerbaarheids-eigenschappen blijven natuurlijk onveranderd.

2.4 Sinus- en cosinusreeksen

Laat f een stuksgewijs continue functie zijn op het interval $[0, \pi]$. Definieer de functies g_1 en g_2 als volgt:

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{als } x = 0,\ x = \pm\pi, \\ -f(-x) & \text{als } -\pi < x < 0, \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } 0 \leq x \leq \pi, \\ f(-x) & \text{als } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

en zet beide functies 2π-periodiek voort. De functie g_1 is dan **oneven**, dwz $g_1(-x) = -g_1(x)$, terwijl g_2 **even** is: $g_2(-x) = g_2(x)$. Als je van g_1 de Fourierreeks berekent vind je alleen sinustermen: je hebt een *sinusreeks*, die wij al in een andere context gezien hebben. De Fourierreeks van g_2 is daarentegen een *cosinusreeks*. Merk op dat je de oorspronkelijke f blijkbaar op verschillende manieren als Fouriereeks (met gegeven periodes) kunt representeren. Dat is natuurlijk van belang voor ons voorbeeldprobleem: de warmtevergelijking. Als de beginfunctie ψ voldoende glad is kun je hem in een sinusreeks ontwikkelen, zoals wij graag willen.

Opmerking Je kunt zonder veel problemen bewijzen dat iedere functie f op unieke wijze geschreven kan worden als de som van een even functie f_e en een oneven functie f_o: $f = f + e + f_o$ met

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Waarom is die ontbinding uniek?

2.5 Opgaven

1. *Laat f een continue, 2π-periodieke, even functie zijn op $-\pi \leq x \leq \pi$: voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ geldt $f(-x) = f(x)$. Laat zien dat de Fouriereeks van f een cosinusreeks is.*

2. *Laat, in de vorige opgave, $f(x) = |x|$ (buiten $[-\pi, \pi]$ periodiek voortgezet). Bereken de Fourierreeks en verifieer dat je inderdaad een cosinusreeks hebt.*

3. *Laat g een continue, 2π-periodieke, oneven functie zijn op $-\pi \le x \le \pi$: voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ geldt $f(-x) = -f(x)$. Laat zien dat de Fouriereeks van g een sinusreeks is.*

4. *Laat, in de vorige opgave, $f(x) = x$ (buiten $[-\pi, \pi]$ periodiek voortgezet). Bereken de Fourierreeks en verifieer dat je inderdaad een sinusreeks hebt.*

5. *Bereken de Fourierreeks op $-1 < x < 1$ van de (periodiek voortgezette) functie $f(x) = x + 1$. Hint: Dit kun je handig aanpakken!*

6. *Vind de Parseval gelijkheid voor nette $2L$-periodieke functies.*

7. (a) *Bepaal de Fourierreeks van $f(x) = x^2$ op $[-\pi, \pi]$.*

   (b) *Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.*

8. *Bereken de Fourierreeksen van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = |\sin x|$ op $[-\pi, \pi]$. Merk op dat die reeksen nogal verschillen, ook op het interval $(0, \pi]$!*

9. *Laat f stuksgewijs continu zijn op $[-\pi, \pi]$. Laat zien dat je f kunt schrijven als $f = f_1 + f_2$, met f_1 even en f_2 oneven.*

10. (a) *Schrijf $\cos x$ als een sinusreeks en $\sin x$ als cosinusreeks op het interval $0 < x < \pi$.*

    (b) *Laat zien dat*

$$2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} = \pi.$$

    (c) *Hoeveel termen in deze reeks moet je meenemen als je π in 3 cijfers achter de komma nauwkeurig wilt hebben (dwz met $|\text{fout}| \le 5.10^{-4}$)?*

11. *Ontwikkel $f(x) = 1$ $(0 < x < \pi)$ in een sinusreeks en ook in een cosinusreeks.*

12. *Vind de Fourierreeks met periode 2 op $[-1, 1]$ van $f(x) = x^3$. Kun je die reeks term voor term differentiëren?*

13. *Vind de Fourierreeks op $[-\pi, \pi]$ van $f(x) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$. Hint: beschouw de functie*

$$h(x) = e^{e^{ix}}$$

    en denk aan de relatie $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en aan de Taylorreeks van de functie $g(z) = e^z$.

14. *Vind de sinusreeks (met periode 10) van $f(x) = e^x$ op het interval $(0, 5)$.*

3 Lineaire partiële differentiaalvergelijkingen

In deze sectie zullen wij de techniek "scheiding van variabelen", die al in de inleiding genoemd werd, gebruiken om diverse problemen op het gebied vasn lineaire partiële differentiaalvergelijkingen op te lossen. We beginnen met ons voorbeeld uit de inleiding:

3.1 De warmtevergelijking in één ruimte-dimensie: afleiding

Wij beschouwen een cirkelcilinder van lengte L en uniforme doorsnede 1, waarvan de as langs de x-as ligt en het interval $0 \leq x \leq L$ beslaat. Wij denken ons de cilinder opgebouwd uit uniform materiaal; de cilinderwand wordt gedacht geïsoleerd te zijn voor warmte-transport. Op een begintijdstip $t = 0$ veronderstellen wij een temperatuurverdeling $T(x, 0)$ in de staaf: de temperatuur hangt alleen van x (en t) af, niet van de plaats in de doorsnede. Vanaf $t = 0$ gaan wij op $x = 0$ en $x = L$ *randvoorwaarden* opleggen aan de temperatuur (uniform over de doorsnede). Wij vragen ons af hoe de temperatuur in de staaf zich zal gaan ontwikkelen. Wij zullen hiervoor allereerst de "warmtevergelijking" afleiden. Deze afleiding is heel illustratief voor de wiskundige behandeling van behoudswetten in het algemeen.

Allereerst stellen wij vast dat het zeer aannemelijk is dat de warmteverdeling uniform blijft over doorsnedes. Dat wil zeggen: de warmte/temperatuur is alleen van x en t afhankelijk.
Voor het vervolg is het goed om je bewust te zijn van de relatie tussen warmte en temperatuur. Warmte is een vorm van energie, de temperatuur is een meetbare grootheid die iets zegt over de energie-dichtheid, dwz: de energie per volume-eenheid. *In onze benadering van het probleem* nemen wij een heel eenvoudige relatie aan:

Aanname: de energie-dichtheid $w(x,t)$ is een lineaire functie van de temperatuur:

$$w = \rho c T. \tag{10}$$

Hier is ρ de materiaaldichtheid (het soortelijk gewicht) en c de soortelijke warmte. Beide grootheden worden hier constant verondersteld. De relatie (10) veronderstelt dat de energiedichtheid nul is op $T = 0$. In principe is dat niet belangrijk: je mag best een referentietemperatuur aftrekken. In de vergelijkingen zullen wij dat terugzien: de temperatuur komt niet zelf voor, wel zijn afgeleides! Het is goed om je te realiseren dat de relatie (10) tussen w en T niet algemeen waar kan zijn: denk aan ijs en water, beide op 0°C!

Als je een *warmtebalans* wilt afleiden, moet je je eerst realiseren hoe je wiskundig kunt uitdrukken hoeveel warmte waar zit. De goede aanpak is: de warmte, opgeslagen op tijdstip t in het stuk van onze staaf dat ligt tussen (willekeurig gekozen) x_1 en $x_2 > x_1$ wordt gegeven door

$$\Gamma(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho c T(x,t) dx.$$

Merk op dat wij hebben gebruikt (waar?) dat de oppervlakte van een doorsnede =1 is. Wij zullen dat verder stilzwijgend blijven doen. De volgende stap is het formuleren van de warmte-boekhouding: Hoe verandert Γ in de tijd? Daarvoor heb je fysica nodig, en je moet weten welke processen zich afspelen. Wij nemen hier aan: er is alleen transport van warmte, er wordt geen warmte geproduceerd. Hoe warmte-productie moet worden meegenomen wordt in een opgave aan de orde gesteld. Wat transport van warmte betreft: de fysica leert dat de warmteflux ϕ wordt gegeven door de relatie

$$\phi = (-\lambda \text{grad} T =) - \lambda T_x.$$

Tussen haakjes staat hoe het er in meer dimensies uit ziet. We nemen aan dat λ constant is. In principe kunnen wij nu beschrijven hoe Γ verandert:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \lambda T_x(x_2, t) - \lambda T_x(x_1, t).$$

(De doorsnedes zijn telkens = 1, zoals afgesproken.) Wij hebben dus

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x_1}^{x_2} \rho c T(x,t) dx \right] = \lambda T_x(x_2, t) - \lambda T_x(x_1, t).$$

De volgende stappen: verwissel in het linkerlid integraal en afgeleide en schrijf het rechterlid als integraal:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho c \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda T_x), \quad \text{of}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \rho c \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda T_x) \right\} dx = 0.$$

De laatste stap is het toepassen van een stelling uit de integraalrekening: als f continu is op $[a,b]$ en $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 0$ voor alle $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, dan geldt dat $f \equiv 0$. Gebruikend dat onze $x_1 < x_2$ willekeurig gekozen waren, concluderen wij, aannemend dat λ constant is:

$$T_t = kT_{xx}, \tag{11}$$

de *warmtevergelijking*. Hier is $k = \frac{\lambda}{\rho c}$.

Opmerking Met dezelfde techniek kun je laten zien dat de vergelijking voor diffusief materiaaltransport identiek is met de warmtevergelijking, afgezien natuurlijk van de diverse constanten.

Opgaven

1. Veronderstel dat $\rho = c = 1$, maar dat λ van T en van x afhangt. Hoe ziet de warmtevergelijking er nu uit?

2. Veronderstel dat het materiaal van onze staal ijzer is en dat er een constante electrische stroom met stroomdichtheid I door de cilinder (draad!) loopt. Het gedissipeerde vermogen (de warmte die vrijkomt per eenheid van tijd en van massa) bedraagt I^2R, waar R de soortelijke weerstand van ijzer is. Hoe ziet de warmtevergelijking er nu uit?

3.2 Oplossing van de warmtevergelijking via scheiding van variabelen

In de inleiding hebben wij al stil gestaan bij de techniek "scheiding van variabelen" voor het oplossen van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen (waarom alleen voor lineaire vergelijkingen?). Wij gaan deze techniek nu toepassen op de warmtevergelijking. Allereerst behandelen wij het probleem (P) uit de inleiding:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} T_t = kT_{xx} & (0 < x < L,\ t > 0), \\ T(0,t) = T(L,t) = 0 & (t > 0), \\ T(x,0) = \psi(x) & (0 < x < L). \end{cases}$$

Merk op dat de eerdere λ nu door k is vervangen. In verband met onze analyse van Fourierreeksen zullen wij aannemen dat ψ stuksgewijs continu is en dat alle relevante linker- en rechterafgeleiden bestaan. Om voor de hand liggende redenen zullen wij ook eisen dat $\hat{\psi} = \psi$. Op grond van de theorie kunnen wij dan ψ in een sinusreeks ontwikkelen:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Het ligt nu voor de hand om als oplossing van probleem (P) te proberen (zie de inleiding!)

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2 kt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{12}$$

Inderdaad kun je bewijzen dat wij hiermee de oplossing te pakken hebben. Het is goed om op te merken dat de beginfunctie ψ niet continu hoeft te zijn. In het bijzonder mag er een discrepantie zijn tussen de begin- en de randvoorwaarden!.

3.2.1 Opgaven

1. *Los op:*

$$u_t = 3u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0; u(0,t) = u(\pi,t) = 0; u(x,0) = \sin 2x.$$

2. $$u_t = 2u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0; u(0,t) = u(1,t) = 0; u(x,0) = x.$$

3. $$u_t = u_{xx},\ 0 < x < 10,\ t > 0; u(0,t) = u(1,t) = 0; u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < x < 5, \\ -1 & \text{als } 5 < x < 10. \end{cases}$$

4. *Hoe wordt de oplossing als je in plaats van $T(0,t) = T(L,t) = 0$ eist: $T(0,t) = a,\ T(L,t) = b$ voor gegeven constante a en b?*

5. *Los op:*

$$u_t = 3u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0; u(0,t) = 1, u(\pi,t) = -1; u(x,0) = \sin 2x.$$

3.2.2 Andere randvoorwaarden

In plaats van aan de rand de temperatuur op te leggen kunnen wij ook eisen dat een rand geïsoleerd is voor warmtetransport, of dat er een relatie tussen temperatuur en warmtetransport is (zoiets als: het transport naar buiten is evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving). Zulke eisen geven natuurlijk andere ranvoorwaarden. Als voorbeeld behandelen wij het volgende probleem

$$(\mathrm{Q}) \begin{cases} T_t = kT_{xx} & (0 < x < L,\ t > 0), \\ T_x(0,t) = T(L,t) = 0 & (t > 0), \\ T(x,0) = \psi(x) & (0 < x < L). \end{cases}$$

Randvoorwaarden van het type $\cdots = 0$ worden *homogeen* genoemd. Als je een stel oplossingen met homogene randvoorwaarden bij elkaar optelt heb je weer zo'n oplossing; voor *inhomogene* randvoorwaarden gaat dat niet op. Je kunt dan ook niet zonder meer oplossingen in (bijvoorbeeld Fourier-)reeks-vorm construeren. Zie ook opgave 4 hierboven.

Blijkbaar is de staaf geïsoleerd op $x = 0$, terwijl wij op $x = L$ de temperatuur voorschrijven. Laten wij weer scheiding van variabelen toepassen: zoek naar oplossingen van het type $f(x)g(t)$ die aan de randvoorwaarden voldoen. Je krijgt

$$f(x)g'(t) = kf''(x)g(t).$$

Deling door $f(x)g(t)$ geeft weer

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = k\frac{f''(x)}{f(x)} = -c^2$$

voor een constante c. Het minteken beredeneer je precies als vroeger. Wij vinden

$$f(x) = a\cos\frac{cx}{\sqrt{k}} + b\sin\frac{cx}{\sqrt{k}}.$$

De randvoorwaarden $f'(0) = f(L) = 0$ leveren nu de eisen: $b = 0$ en $\cos\left(\frac{cL}{\sqrt{k}}\right) = 0$. Dus

$$c = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})\sqrt{k}}{L}.$$

Wij vinden dus de "basisfuncties"

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

De oplossing wordt van het type

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 kt}{4L^2}} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

De coëfficiënten a_{2n+1} worden op de gebruikelijke manier bepaald via de Fourierontwikkeling van de beginfunctie, waarbij je kennelijk alleen de oneven genummerde cos-termen moet meenemen.

We hadden dit probleem ook op een andere manier kunnen oplossen:
Beschouw, in plaats van probleem (Q), het probleem (Q′):

$$(\mathrm{Q}')\begin{cases} T_t = kT_{xx} & (-L < x < L,\ t > 0), \\ T(-L,t) = T(L,t) = 0 & (t > 0), \\ T(x,0) = \tilde{\psi}(x) & (-L < x < L), \end{cases}$$

waar $\tilde{\psi}$ is gedefinieerd door

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{als } x > 0, \\ \psi(-x) & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

Het probleem (Q′) is probleem (Q), symmetrisch voortgezet tot het x-interval $[-L, L]$. Op grond van de spiegel-symmetrie in de probleemformulering kun je verwachten dat de oplossing $\tilde{T}(x,t)$ van probleem (Q′) een even functie is in x-richting. Gevolg: $\tilde{T}_x(0,t) = 0$. Dus je kunt T ook via $\tilde{T}$ berekenen (wij gebruiken hier dat de oplossing T uniek is!). En het oplossen van probleem (Q′) is identiek met het oplossen van probleem (P).

3.2.3 Opgaven

1. *Los op*

$$u_t = 2u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0,\ u(x,0) = 4\cos\frac{2\pi x}{3} - 2\cos\frac{4\pi x}{3}.$$

2. $$u_t = 5u_{xx},\ -\pi < x < \pi,\ t > 0,\ u(-\pi,t) = 1,\ u_x(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = 0.$$

3. *Wij beschouwen een staaf* $0 < x < 4$ *waarvoor de warmtevergelijking luidt*

$$T_t = T_{xx}.$$

Je kunt aannemen dat $\rho = c = \lambda = 1$ *en dat je in feite te maken hebt met een cilinder van doorsnede 1 (zie de afleiding in sectie 3.1). Op tijdstip* $t = 0$ *geldt* $T(x,0) = x - 3$. *Vanaf* $t = 0$ *leggen wij de linker randvoorwaarde* $T(0,t) = 0$ *op. Wij stellen ons voor dat er aan de rechterkant* $x = 4$ *warmte-uitwisseling met de omgeving is. De omgevingstemperatuur aan de rechterkant is 5 en de warmteflux de staaf uit wordt gegeven door* $T(4,t) - 5$ *(je zou kunnen zeggen dat de overdrachtscoëfficiënt = 1 is). Stel het volledige probleem op en construeer de oplossing.*

Hint: We hebben hier te maken met een inhomogene randvoorwaarde. Construeer eerst een oplossing $u(x,t)$ van de warmtevergelijking (maar met $u_t = u_{xx} = 0$, een z.g "steady state") die voldoet aan $u(x,0) = 0$ en aan randvoorwaarde rechts, maar niet (noodzakelijk) aan de beginvoorwaarde. Gebruik vervolgens dat de som van twee oplossingen van de warmtevergelijking weer een oplossing is en maak zo een nieuw probleem met homogene randvoorwaarden. Hiervoor kun je weer eenvoudig scheiding van variabelen toepassen.

3.3 Het oplossen van een warmtevergelijking

In deze sectie werken wij een voorbeeld vrijwel volledig uit. We bekijken het probleem

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t = u_{xx} - 4u & -1 < x < 1,\ t > 0 \\ u(-1,t) = -1, \quad u(1,t) = 1 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Dit stelt het temperatuurverloop $u(x,t)$ voor in een staaf van lengte 2, waarvan de uiteinden op temperatuur -1 resp 1 worden gehouden, met een begintemperatuur $= 0$. Verder is er warmteuitwisseling met de omgeving: de term $-4u$ in de vergelijking.

Natuurlijk willen wij de methode van scheiding van variabelen toepassen. Als wij precies doen wat wij eerder deden komt er een probleem. We zochten toen oplossingen van de differentiaalvergelijking, van de vorm $f(x)g(t)$, met $f(-1) = f(1) = 0$, onze toenmalige randvoorwaarden . Daarvan vonden wij er oneindig veel. Wij hebben gebruikt dat je daarvan sommen kunt nemen, die weer een oplossing zijn. **Dat gaat hier mis: door optelling verlies je de controle over de randvoorwaarden! Vroeger telden wij alleen nullen bij elkaar op.**

Remedie Laat $\psi(x)$ voldoen aan

$$\psi'' - 4\psi = 0, \quad \psi(-1) = -1, \quad \psi(1) = 1.$$

Als wij nu schrijven

$$v(x,t) = \psi(x),$$

dan voldoet v automatisch aan de differentiaalvergelijking (waarom?) en aan de randvoorwaarden. Definieer nu:

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t) = u(x,t) - \psi(x).$$

Dan moet w voldoen aan

$$(\mathrm{Q}) \begin{cases} w_t = w_{xx} - 4w & -1 < x < 1,\ t > 0 \\ w(-1,t) = 0, \quad w(1,t) = 0 & t > 0 \\ w(x,0) = -\psi(x) & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Omgekeerd, als wij (Q) kunnen oplossen en ψ kunnen vinden, hebben wij (P) opgelost.

3.3.1 Het bepalen van ψ

Het is bekend dat $\psi(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ en wij moeten A en B bepalen uit de randvoorwaarden

$$Ae^{-2} + Be^{2} = -1, \quad Ae^{2} + Be^{-2} = 1.$$

Optellen van die relaties geeft dat $A + B = 0$. Je vindt dan gemakkelijk dat

$$A = \frac{1}{e^2 - e^{-2}}, \quad B = \frac{1}{e^{-2} - e^{2}}.$$

Daarmee hebben wij ψ te pakken.

3.3.2 Scheiding van variabelen voor w.

Wij proberen weer oplossing van de differentiaalvergelijking waaraan w moet voldoen, van het type $f(x)g(t)$, met $f(-1) = f(1) = 0$. Dat geeft

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t) - 4f(x)g(t).$$

Delen door $f(x)g(t)$ en de bekende redenering toepassen:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = c = \frac{f''(x) - 4f(x)}{f(x)}.$$

Hier is c weer een constante. Blijkbaar krijg je

$$f'' = (c+4)f.$$

Net als vroeger krijg je alleen iets interessants als $c + 4 < 0$. Zet $c + 4 = -\gamma^2$. Dat levert $f(x) = \alpha\cos(\gamma x) + \beta\sin(\gamma x)$.

De randvoorwaarden impliceren

$$\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma = 0; \quad \alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma = 0.$$

Gevolg: $\alpha\cos\gamma = \beta\sin\gamma = 0$. Twee mogelijkheden:

$$\alpha = 0 \text{ en } \quad \sin\gamma = 0, \text{of}$$

$$\beta = 0 \text{ en } \quad \cos\gamma = 0.$$

In het eerste geval heb je dat $\gamma = k\pi$, in het tweede geval $\gamma = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Je kunt dit als volgt samenvatten:

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{2},$$

waarbij voor de even waarden van k je met sinusssen te maken hebt, voor de oneven k heb je cosinussen. Wij moeten nu de beginfunctie, $-\psi(x)$, uitdrukken in die basisfuncties:

$$-\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\right),$$

waarbij

$$\alpha_{2k} = \beta_{2k+1} = 0.$$

Voor de goede orde: $\alpha_0 = 0$. We hebben eigenlijk te maken met basisfuncties van periode 4, tweemaal zo groot als ons interval. Om de randvoorwaarden af te dwingen moeten wij ψ in gedachten zo (periodiek) voortzetten dat $\psi(1+x) = -\psi(1-x)$ en dus (waarom?) ook $\psi(-1+x) = -\psi(-1-x)$. Dat geeft ons dan dat $\alpha_0 = 0$.

3.3.3 Bepaling van de α_k en β_k

Dit is best lastig. Misschien is het het handigst om de coëfficiënten uit te rekenen zoals in het diktaat gebeurd is. Wij merken op dat , voor $k \neq m$, beide oneven,

$$\int_{-1}^{1} \cos\frac{k\pi x}{2}\cos\frac{m\pi x}{2}dx = 0,$$

terwijl voor $k \neq m$ beide even geldt

$$\int_{-1}^{1} \sin\frac{k\pi x}{2}\sin\frac{m\pi x}{2}dx = 0.$$

En tenslotte, voor k even en m oneven:

$$\int_{-1}^{1} \sin\frac{k\pi x}{2}\cos\frac{m\pi x}{2}dx = 0.$$

Het is nuttig om dat zelf na te gaan! Het even/oneven zijn speelt een belangrijke rol. Blijft over te berekenen $\int_{-1}^{1}\cos^2\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx$ voor k oneven en $\int_{-1}^{1}\sin^2\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx$ voor k even. Ga na dat

$$\int_{-1}^{1} \cos^2\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = 1,$$

$$\int_{-1}^{1} \sin^2\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = 1.$$

Laten wij eerst de cosinustermen bekijken: voor k oneven heb je

$$\int_{-1}^{1} -\psi(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \alpha_k\int_{-1}^{1}\cos^2\frac{k\pi x}{2}dx = \alpha_k.$$

Evenzo: voor even k is

$$\beta_k = \int_{-1}^{1} -\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx.$$

Nu hadden wij ψ al bepaald, en de integralen (dus de coëfficiënten) kunnen rechtstreeks uitgerekend worden. **Opgave**!

3.3.4 De volledige oplossing

We gaan even terug. We hadden gezegd $\gamma_k = \frac{k\pi}{2}$, terwijl de bijbehotende c (uit de scheiding van variabelen, noem hem nu c_k) voldoet aan

$$c_k = -\frac{k^2\pi^2}{4} - 4.$$

De volledige oplossing wordt nu

$$u(x,t) = \psi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\frac{k^2\pi^2}{4}+4)t}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{2} + \beta_k\sin\frac{k\pi x}{2}\right).$$

Hier zijn de coëfficiënten als boven, ihb geldt $\alpha_{2k} = \beta_{2k+1} = 0$ voor alle k.

3.4 De trillende snaar

In deze sectie bestuderen wij de beweging van een snaar, die opgespannen is tussen de punten $x = 0$ en $x = L$. Wij gaan niet in op de afleiding van de partiële differentiaalvergelijking; in principe gaat het weer om behoudswetten (nu uit de mechanica) en de idee van de afleiding is gelijk aan die in het warmte-geval. Wij nemen aan dat de snaar trilt in het x, y vlak en dat een (massa)punt met rustpositie $(x, 0)$ steeds dezelfde x-coordinaat houdt. De positie op tijdstip t is dan $(x, u(x, t))$. Deze aanname is zeker niet triviaal waar en wij zullen ons moeten beperken tot kleine uitwijkingen. De differentiaalvergelijking luidt

$$u_{tt} = \lambda u_{xx},$$

waar $\lambda > 0$ fysische en meetkundige (afmetings-) grootheden bevat. Als randvoorwaarden hebben wij hier

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 :$$

de snaar heeft vaste bevestigingspunten. Natuurlijk is er ook een begin-uitwijking $\psi(x) := u(x, 0)$. Maar het is duidelijk dat dat niet genoeg is: de snaar kan op $t = 0$ wel aan het bewegen zijn. Wij zullen ook $v(x) := u_t(x, 0)$ moeten kennen. Als dat zo is hebben wij het probleem

$$\text{(S)}\begin{cases} u_{tt} = \lambda u_{xx}, & (0 < x < L,\ t > 0); \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & (t > 0); \\ u(x, 0) = \psi(x) & (0 < x < L); \\ u_t(x, 0) = v(x) & (0 < x < L). \end{cases}$$

Het feit dat deze vergelijking, net als de warmtevergelijking, lineair is rechtvaardigt de poging om ook hier scheiding van variabelen toe te passen. Onze eerste stap is: zoek oplossingen van het type $f(x)g(t)$ van de vergelijking $u_{tt} = \lambda u_{xx}$, die voldoen aan $f(0) = f(L) = 0$. Je krijgt dan, na invulling en deling door $f(x)g(t)$, zoals dat ook bij de warmte-vergelijking gebeurde,

$$\frac{g''}{g} = \lambda \frac{f''}{f} = -\frac{k^2\pi^2\lambda}{L^2}$$

met $k \geq 0$ geheel en

$$f(x) = b \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Voor g vinden wij

$$g(t) = a_1 \cos\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right) + a_2 \sin\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right).$$

Om aan onze eerste beginvoorwaarde $u(x, 0) = \psi(x)$ te kunnen voldoen, moeten wij ψ op de bekende manier in een sinusreeks ontwikkelen (wij gaan ervan uit dat ψ dat toelaat!):

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Wij kunnen nu alvast een oplossing $\tilde{u}(x, t)$ construeren die aan de randvoorwaarden en aan de eerste beginvoorwaarde voldoet:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left[\cos\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right) + c_k \sin\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right)\right].$$

Merk op dat wij de termen met $\sin\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right)$ erbij kunnen zetten zonder de eerste beginvoorwaarde of de randvoorwaarden aan te tasten. Blijkbaar hebben wij hier een middel om te trachten de tweede beginvoorwaarde onder controle te krijgen. Wij differentiëren nu $\tilde{u}$ naar t, termsgewijs, onder aanname dat dat mag:

$$\tilde{u}_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left[-\frac{k\pi\sqrt{\lambda}}{L}\sin\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right) + c_k\frac{k\pi\sqrt{\lambda}}{L}\cos\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right)\right].$$

Willen wij nu de tweede beginvoorwaarde vervullen, dan moeten wij eisen

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k c_k \frac{k\pi\sqrt{\lambda}}{L}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Omdat wij v eenvoudig in een sinusreeks kunnen ontwikkelen, hebben wij nu de c_k te pakken: als $v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, dan hebben wij

$$c_k = \frac{L d_k}{k b_k \pi\sqrt{\lambda}}.$$

Dus tenslotte

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left[b_k\cos\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right) + \frac{L d_k}{k\pi\sqrt{\lambda}}\sin\left(\frac{k\pi t\sqrt{\lambda}}{L}\right)\right]. \tag{13}$$

Wij gaan niet in op de preciese voorwaarden waaronder (13) inderdaad de oplossing is. Je kunt aannemen: als de beginvoorwaarden voldoende glad zijn en aansluiten aan de randvoorwaarden gaat het goed.

Het is wel nuttig om even bij deze oplossing stil te staan. Met behulp van bekende goniometrische formules als

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

kun je eenvoudig nagaan dat er functies F en G zijn (WELKE?) zo, dat

$$u(u,t) = F(x + t\sqrt{\lambda}) + G(x - t\sqrt{\lambda}).$$

De oplossing u is dus een som van twee "lopende goven" (ga zelf na wat dit betekent!). Dat dat zo is hadden wij ook op een andere manier kunnen zien, n.l. via de coordinatentransformatie

$$\xi = x + t\sqrt{\lambda},\ \eta = x - t\sqrt{\lambda}.$$

Je hebt dan

$$u_x = u_\xi + u_\eta; \quad u_t = u_\xi\sqrt{\lambda} - u_\eta\sqrt{\lambda}.$$

Voor de tweede afgeleiden vind je

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}; \quad u_{tt} = u_{\xi\xi}\lambda - 2u_{\xi\eta}\lambda + u_{\eta\eta}\lambda.$$

De differentiaalvergelijking $u_{tt} = \lambda u_{xx}$ levert nu:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Dit betekent dat u_ξ geen functie meer is van η. Hieruit volgt dat

$$u(x,t) = F(\xi) + G(\eta),$$

voor zekere functies F en$G$ wat, vanwege de definities van ξ en η, weer F en G als boven oplevert. In plaats van de Fourierreeks te gebruiken kun je de oplossing ook construeren op basis van deze kennis. Wij zullen daar niet verder op ingaan, maar de belangstellende lezer wordt uitgenodigd dit te proberen: het is niet echt moeilijk.

Ook andere randvoorwaarden kunnen voorkomen. Bijvoorbeeld in de situatie van een staaf die aan één uiteinde gefixeerd wordt, terwijl hij op $t = 0$ in zijn lengterichting is uitgerekt (bijvoorbeeld doordat er een gewicht aan hangt). Als je vanaf $t = 0$ de rek-kracht wegneemt krijg je een probleem als (S), maar nu met randvoorwaarden $u(0,t) = 0$; $u_x(L,t) = 0$. De aanpak is steeds dezelfde. Zie de opgaven.

3.4.1 Opgaven