

Stelsels differentiaalvergelijkingen

Stelsels homogene differentiaalvergelijkingen.

We bekijken in deze paragraaf stelsels homogene differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A \text{ een } n \times n \text{ matrix} \quad (1)$$

Voorbeeld 1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}, \quad \text{dus hier is } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dit stelsel is simpel op te lossen: $y(t) = c \cdot e^{-2t}$ invullen in $x'(t) = 2x + y$ geeft $x'(t) = 2x(t) + ce^{-2t}$, een inhomogene differentiaalvergelijking. Die los je eenvoudig op: $x(t) = c_1 e^{2t} - \frac{1}{4} c e^{-2t}$.

Voorbeeld 2. Hoe nu te handelen met

$$\begin{cases} x'(t) = -2y - 3x \\ y'(t) = 2y - 3x \end{cases}.$$

We noemen eerst de volgende stelling.

Stelling 1 Als λ een eigenwaarde is van A en \underline{x} de bijbehorende eigenvector is, dan is $\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{x}$ een oplossing van (1).

Bewijs. $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, dus $Ae^{\lambda t} \underline{x} = \lambda e^{\lambda t} \underline{x} = (e^{\lambda t} \underline{x})'$. □

Voorbeeld 2 vervolg. In het tweede voorbeeld, waar $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, volgt uit

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 \\ -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0$$

dat 3 en -4 de eigenwaarden zijn.

- Eigenvectoren bij 3: oplossen van $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ geeft $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Eigenvectoren bij -4: oplossen van $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ geeft $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

We zien dat voor elke c_1, c_2 uit \mathbb{R} , $c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oplossingen zijn.

Bewering: alle oplossingen zijn van de vorm

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

met andere woorden

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-4t} \\ y(t) = -3c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t} \end{cases}$$

met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dat is altijd zo.

Stelling 2 Als de $n \times n$ matrix A n verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft, met $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ de bijbehorende eigenvectoren, dan krijg je alle oplossingen van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ via $\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{x}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \underline{x}_n$, met c_1, \dots, c_n (eventueel) complexe getallen.

Voorbeeld 3. Los op $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2y + z \\ z' = z \end{cases}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Eigenwaarden zijn } 3, 2 \text{ en } 1.$$

Bijbehorende eigenvectoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oplossingen zijn dus

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^t \\ y(t) = -c_2 e^{2t} - 2c_3 e^t \\ z(t) = c_3 e^t \end{cases} \text{ met } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 4. Los op

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Eigenwaarden: } (1 - \lambda)^2 + 4 = 0 \text{ geeft } \lambda = 1 \pm 2i.$$

- Eigenvectoren bij $1 + 2i$: $\begin{pmatrix} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{pmatrix}$ oplossen geeft $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ als eigenvector.
- Eigenvectoren bij $1 - 2i$: $\begin{pmatrix} 2i & -2 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \end{pmatrix}$ oplossen geeft $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ als eigenvector.

Dus:

$$\begin{cases} x(t) &= (c_1 + c_2)e^t \cos 2t + i(c_1 - c_2)e^t \sin 2t \\ y(t) &= -i(c_1 - c_2)e^t \cos 2t + (c_1 + c_2)e^t \sin 2t \end{cases}$$

met $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Nu hebben we een probleem: we willen de reële oplossingen hebben. Bedenk dat $e^{(1+2i)t} = e^t \cdot e^{2it} = e^t \cos 2t + ie^t \sin 2t$.

Door nu c_1 en c_2 zo te kiezen dat $a = c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$ en $b = i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$ krijgen we alle reële oplossingen.

Dus: alle reële oplossingen zijn

$$\begin{cases} x(t) &= ae^t \cos 2t + be^t \sin 2t \\ y(t) &= -be^t \cos 2t + ae^t \sin 2t \end{cases}$$

met $a, b \in \mathbb{R}$.

Dubbele eigenwaarden

Je kunt je afvragen wat je moet doen als de $n \times n$ matrix A onverhoopt niet n verschillende eigenwaarden heeft. Zolang er een zogenaamde basis van eigenvectoren is, is dat allemaal geen probleem. Maar zodra dat niet het geval is wordt de zaak aanzienlijk ingewikkelder. We doen een voorbeeld, maar verwijzen voor algemene theorie naar boeken over differentiaalvergelijkingen en lineaire algebra. In het bijzonder moet je voor het algemene geval kennis nemen van de zogenaamde Jordan normaal vorm van een matrix. Zie bijvoorbeeld:

P. Lancaster, M. Tismenetsky: The theory of matrices, Second edition, Academic Press, London, 1985.

Voorbeeld 5.

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t), \\ y'(t) &= y(t), \\ x(0) &= 1, y(0) = 2. \end{aligned}$$

De matrix A is nu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die heeft eigenwaarde 1 (en dat is de enige eigenwaarde), met bijbehorende eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Er is geen basis van eigenvectoren. In dit voorbeeld kunnen we natuurlijk makkelijk verder. De dv voor

y laat zich eenvoudig oplossen: $y(t) = ce^t$, waar $c \in \mathbb{R}$. Invullen in de dv voor x geeft dan de inhomogene eerste orde dv

$$x'(t) - x(t) = ce^t.$$

Oplossingen van de bijbehorende homogene dv zijn $x(t) = c_1 e^t$, dus als particuliere oplossing proberen we maar eens $x(t) = c_2 t e^t$. Je ziet dan snel dat je voor c_2 moet nemen $c_2 = c$. De oplossingen zijn dus:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c t e^t \\ c e^t \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c \in \mathbb{R}.$$

Nu gebruiken dat $x(0) = 1, y(0) = 2$ geeft dat $c_1 = 1, c = 2$. De oplossing is dus

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2t e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

Stelsels inhomogene differentiaalvergelijkingen

Ook voor stelsels inhomogene differentiaalvergelijkingen werkt het gebruikelijke "proberen" van een oplossing voor bepaalde soorten rechterlid.

Voorbeeld 6. $\begin{cases} x' = -y + t^3 \\ y' = x + t \end{cases}$

Eerst het homogene stuk $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ ofwel $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Eigenwaarden zijn $\pm i$, alle oplossingen voor de homogene vergelijking zijn

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + b \sin t \\ y(t) = -b \cos t + a \sin t \end{cases} \quad \text{met } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nu moeten we nog één oplossing van de inhomogene vergelijking vinden. Probeer daartoe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ met a, b, c, d, e, f, g, h reële getallen. Dan is

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= 3t^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= t^3 \begin{pmatrix} -b+1 \\ a \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -f \\ e+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \\ g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergelijk coëfficiënten, je krijgt het volgende stelsel van acht vergelijkingen met acht onbekenden:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ 1 - b = 0 \\ -d = 3a \\ c = 3b \\ 2c = -f \\ e + 1 = d \\ e = -h \\ f = g \end{array} \right.$$

Dit stelsel is eenvoudig op te lossen, je krijgt $a = d = 0$, $b = 1$, $c = 3$, $e = -1$, $f = g = -6$, $h = 1$.

Samenvattend:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - t - 6 \\ t^3 - 6t + 1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + b \sin t + 3t^2 - t - 6 \\ y(t) = -b \cos t + a \sin t - t^3 - 6t + 1 \end{cases}.$$

Laplace transformatie

Ook bij stelsels differentiaalvergelijkingen kunnen we gebruik maken van de Laplace transformatie. Voor een vectorfunctie $\underline{x}(t)$, met coördinaten $x_1(t), \dots, x_n(t)$, voeren we de Laplace transformatie coördinaatsgewijs in. Dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(\underline{x})(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x_1)(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(x_n)(s) \end{pmatrix}.$$

Als A een $n \times n$ matrix is, en f een vectorfunctie met waarden in \mathbb{R}^n , dan kunnen we van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= A\underline{x}(t) + f(t), \\ \underline{x}(0) &= \underline{x}_0. \end{aligned}$$

links en rechts de Laplace transformatie nemen. Dat geeft, als we met $X(s)$ de Laplace getransformeerde van \underline{x} en met $F(s)$ de Laplace getransformeerde van f aangeven:

$$sX(s) - \underline{x}(0) = AX(s) + F(s).$$

Hieruit laat zich $X(s)$ simpelweg oplossen: $(sI - A)X(s) = F(s) + \underline{x}(0)$, en dus

$$X(s) = (sI - A)^{-1}F(s) + (sI - A)^{-1}\underline{x}_0.$$

Daaruit kunnen dan de coördinaten van $X(s)$ worden berekend, en door terugtransformatie kunnen we dan $x(t)$ vinden (in principe). Theoretisch is dit erg nuttig, in de praktijk kan vooral die laatste stap nogal eens tegenvallen.

Voorbeeld 5 nogmaals. Bekijk nog eens voorbeeld 5. Dat laat zich met Laplace transformatie doen. We hebben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

en $f = 0$. Dus

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} \\ \frac{2}{s-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gebruik makend van het feit dat we inmiddels weten dat $\frac{1}{(s-1)^2}$ de Laplace getransformeerde is van te^t en dat $\frac{1}{s-1}$ de Laplace getransformeerde is van e^t zien we (weer) dat de oplossing gegeven wordt door

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2te^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

Opgaven

Bepaal van de volgende stelsels differentiaalvergelijkingen de oplossing

$$\begin{aligned} (a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y \end{cases} & \quad (b) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x + y \end{cases} \\ (c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x + z \\ \frac{dy}{dt} &= 3y + z \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + 2z \end{cases} & \quad (d) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dz}{dt} &= 3x - z \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Bepaal van het stelsel onder d die oplossingen die voldoen aan

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -2, \quad \text{en} \quad z(0) = 0$$

$$\begin{aligned} (f) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 2y - e^{-t} \end{cases} & \quad (g) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 4x - 3y + \sin t \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y - 2 \cos t \end{cases} \\ (h) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x + y + 3t - 5 \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y - 2 \end{cases} & \quad (i) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y + 3z + 48t \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y + 2e^t \\ \frac{dz}{dt} &= 3x - z - 2e^t \end{cases} \end{aligned}$$