

Lineaire dv van orde 2 met constante coefficienten

Homogene vergelijkingen

We bekijken eerst homogene vergelijkingen van orde twee met constante coefficienten, d.w.z. dv's van de vorm

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

Probeer eerst eens of $y(x) = e^{\lambda x}$ een oplossing kan zijn voor een of ander getal λ . Invullen geeft

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = (a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda x} = 0,$$

voor alle x . Dat kan alleen als

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Deze kwadratische vergelijking in λ heet de *karakteristieke vergelijking*. We weten dat deze vergelijking in het algemeen twee, eventueel complexe, oplossingen heeft. Deze oplossingen zullen we voor nu even noteren met λ_1 en λ_2 . Een gevolg van een algemene stelling is dat als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking gegeven door $y(x) = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x}$, met c_1, c_2 willekeurige constanten.

Voorbeelden:

1. $y'' - y = 0$. Probeer $y = e^{\lambda x}$. De karakteristieke vergelijking wordt $\lambda^2 - 1 = 0$, dus $\lambda = \pm 1$. De algemene oplossing is dus $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$, dus $\lambda = -2$ of $\lambda = -1$. De algemene oplossing is dus $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$, met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
3. $y'' + y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 1 = 0$, dus $\lambda = \pm i$. Alle *complexe oplossingen* worden dan gegeven door

$$y(x) = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}, \text{ met } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Nu is $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Dus

$$y(x) = (c_1 + c_2) \cos x + i(c_1 - c_2) \sin x.$$

Neem nu $c_1 + c_2 = a \in \mathbb{R}$ en $i(c_1 - c_2) = b \in \mathbb{R}$. Dat kan, bijvoorbeeld $c_1 = \bar{c}_2$ werkt. Dan $y(x) = a \cos x + b \sin x$ met $a, b \in \mathbb{R}$ is de algemene *reële oplossing*.

4. $y'' + 2y' + y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, dat geeft $\lambda = -1$. Er is nu maar één oplossing van de vorm $y(x) = e^{\lambda x}$, namelijk $y = ce^{-x}$.

Nu vinden we de andere oplossingen door *variatie van constanten*. Dat werkt als volgt: stel $y(x) = c(x)e^{-x}$ is een oplossing, voor één of andere functie $c(x)$. Dan

$$\begin{aligned} y' &= c'e^{-x} - ce^{-x} \\ y'' &= (c''e^{-x} - c'e^{-x}) - (c'e^{-x} - ce^{-x}) = c''e^{-x} - 2c'e^{-x} + ce^{-x}. \end{aligned}$$

Dus

$$y'' + 2y' + y = (c'' - 2c' + c + 2c' - 2c + c)e^{-x} = c''e^{-x} = 0,$$

zodat $c'' = 0$. We hebben dus een differentiaalvergelijking voor $c(x)$ afgeleid. Maar deze is simpel: $c(x) = ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$. Dus

$$y(x) = axe^{-x} + be^{-x} \quad \text{met } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dat is altijd zo: als er één oplossing van de karakteristieke vergelijking is, zeg λ_1 , dan is naast $e^{\lambda_1 x}$ ook $xe^{\lambda_1 x}$ een oplossing.

Inhomogene vergelijking

We bekijken nu vergelijkingen van de vorm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Eerst doen we een algemene bewering: als $y_0(x)$ één oplossing van de inhomogene vergelijking is en $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de algemene oplossing van de homogene vergelijking

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

dan is de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking gegeven door

$$y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dat is leuk, omdat we nu maar één oplossing van de inhomogene vergelijking hoeven te vinden, maar hoe doe je dat dan? Voordat we daar wat over zeggen merken we op dat die ene oplossing van de inhomogene vergelijking een particuliere oplossing heet. Hoe vind je zo'n particuliere oplossing?

- Er is een algemene methode (ook nu weer variatie van constanten geheten), maar die is ingewikkeld.
- Voor veel functies f werkt het volgende idee: probeer voor y_0 lineaire combinaties van f, f', f'', \dots

We illustreren dit met wat voorbeelden

Voorbeelden:

1. Los op $y'' - y = x$. Probeer als particuliere oplossing $y = ax + b$. Invullen geeft (omdat $y'' = 0$) $y'' - y = -ax - b = x$, dus $b = 0$, $a = -1$. De algemene oplossing is dus $y(x) = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.
2. $y'' + y' = \cos x$. Probeer voor y een functie van de vorm $y = a \cos x + b \sin x$. Dan is $y'' = -a \cos x - b \sin x$, en $y' = -a \sin x + b \cos x$. Dus

$$y'' + y' = (-a + b) \cos x - (a + b) \sin x = \cos x,$$

wat geeft $a + b = 0$, $-a + b = 1$. Oplossen van dit stelsel geeft $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Dus is $-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ een oplossing. De oplossing van de homogene vergelijking krijg je zoals gewoonlijk door de karakteristieke vergelijking op te lossen: $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ geeft $\lambda = 0$ of $\lambda = -1$. De algemene oplossing is dus

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + c_1 e^{-x} + c_2 \quad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' - y = e^x$. Nu werkt ae^x natuurlijk niet als particuliere oplossing omdat dit al een oplossing van de homogene vergelijking is. Probeer in zulke gevallen echter $axe^x = y(x)$. Dan

$$y' = axe^x + ae^x, \quad y'' = axe^x + 2ae^x,$$

dus $y'' - y = 2ae^x = e^x$, geeft $a = \frac{1}{2}$.

Een particuliere oplossing is dus $y(x) = \frac{1}{2}xe^x$, zodat de algemene oplossing wordt

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Laten we het recept voor het oplossen van een inhomogene lineaire dv samenvatten

1. Los de bijbehorende homogene dv op.
2. Vind een particuliere oplossing bijvoorbeeld met de methode zoals boven beschreven.
3. Los de constanten in de algemene oplossing op d.m.v. rand- of beginvoorwaarden (indien die aanwezig zijn).

Van dat laatste geven we nog een voorbeeld:

Los op $y'' + y' = \cos x$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$. We weten al dat de algemene oplossing is $y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + c_1 e^{-x} + c_2$. Invullen van $y(0) = 0$ en

$y'(0) = 0$ geeft $0 = -\frac{1}{2} + c_1 + c_2$ en $0 = \frac{1}{2} - c_1$. Dus $c_1 = \frac{1}{2}$ en $c_2 = 0$. De gezochte oplossing is dus

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

We merken tenslotte op dat de technieken die hier gebruikt zijn ook werken voor de algemenere situatie van een n -de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Samenvattend: voor een inhomogene dv

$$y'' + a_1 y' + a_0 = f(x)$$

:

Als $f(x) =$	probeer dan
x^n	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
$e^{\lambda x}$	$a e^{\lambda x}$
$\sin \alpha x$	$a \sin \alpha x + b \cos \alpha x$
$\cos \alpha x$	$a \sin \alpha x + b \cos \alpha x$
lineaire combinatie van deze	soortgelijke lineaire combinatie
product van deze	soortgelijk product

Het recept werkt niet als het rechterlid oplossing is van de bijbehorende homogene d.v.

Een suggestie in dat geval: Probeer x maal de functie uit het recept, als dat ook niet werkt probeer dan x^k maal de functie uit het recept voor $k = 2, 3, \dots$.

Resonantie

Bekijk de tweede orde dv

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \sin(\omega_1 t).$$

Dat is een model voor een periodiek aangedreven trilling. De oplossingen van de homogene vergelijking zijn

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = c_0 \sin(\omega t + \phi_0),$$

waar in de eerste representatie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, en in de tweede, equivalente, representatie $c_0 > 0$ en $\phi_0 \in [0, 2\pi)$.

Probeer als oplossing van de inhomogene vergelijking de functie $y(t) = c \sin(\omega_1 t)$. Dan zien we dat c bepaald wordt door

$$-c\omega_1^2 \sin(\omega_1 t) + \omega^2 c \sin(\omega_1 t) = \sin(\omega_1 t).$$

Dus $c = \frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2}$, mits $\omega_1 \neq \pm\omega$. Voor $\omega_1 \neq \pm\omega$ krijgen we dus als oplossingen

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin(\omega_1 t) + c_0 \sin(\omega t + \phi_0). \quad (1)$$

Voor het geval $\omega_1 = \pm\omega$ merken we allereerst even op dat we alleen $\omega_1 = \omega$ hoeven te bekijken (omdat $\sin(-x) = -\sin x$). Neem dus $\omega_1 = \omega$, en probeer als oplossing van de inhomogene vergelijking

$$y(t) = at \sin(\omega t) + bt \cos(\omega t).$$

Dan is

$$\begin{aligned} y'(t) &= a \sin(\omega t) + a\omega t \cos(\omega t) + b \cos(\omega t) - b\omega t \sin(\omega t), \\ y''(t) &= 2a\omega \cos(\omega t) - 2b\omega \sin(\omega t) - a\omega^2 y(t). \end{aligned}$$

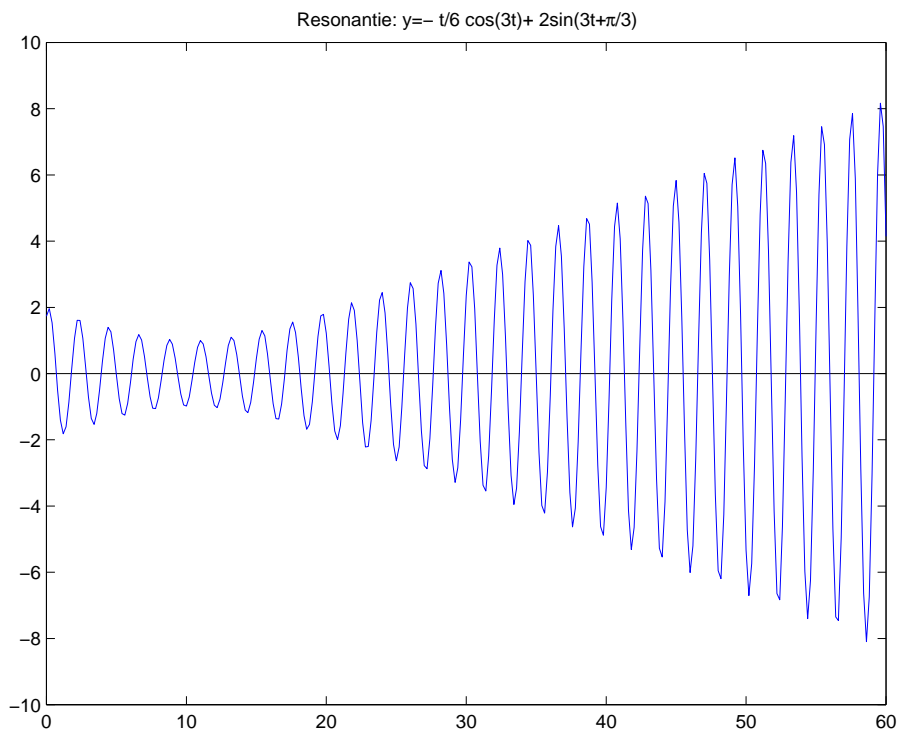
Dus

$$y''(t) + \omega^2 y = 2a\omega \cos(\omega t) - 2b\omega \sin(\omega t).$$

We kunnen dus $a = 0$ en $b = -\frac{1}{2\omega}$ nemen, en dan zijn alle oplossingen in dit geval gegeven door

$$y(t) = -\frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t) + c_0 \sin(\omega t + \phi_0). \quad (2)$$

Merk op dat de amplitude van de eerste term naar oneindig gaat als t naar oneindig gaat. Dat verschijnsel staat bekend als *resonantie*.



We kunnen (2) ook uit (1) halen door de limiet $\omega_1 \rightarrow \omega$ te nemen, met behulp van l'Hôpital:

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega^2 - \omega_1^2} = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\frac{d}{d\omega_1} \sin(\omega_1 t)}{\frac{d}{d\omega_1} (\omega^2 - \omega_1^2)} = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{t \cos(\omega_1 t)}{-2\omega_1} = \frac{t \cos(\omega t)}{-2\omega}.$$

Gedempte trillingen

De differentiaalvergelijking

$$y'' + 2ky' + \nu^2 y = f(t)$$

representeert een aangedreven (door de functie f) gedempte trilling (als $k > 0$ en $\nu^2 - k^2 > 0$). Om de oplossingen van de homogene vergelijking te krijgen lossen we eerst de karakteristieke vergelijking op:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \nu^2 = (\lambda + k)^2 + \nu^2 - k^2 = 0.$$

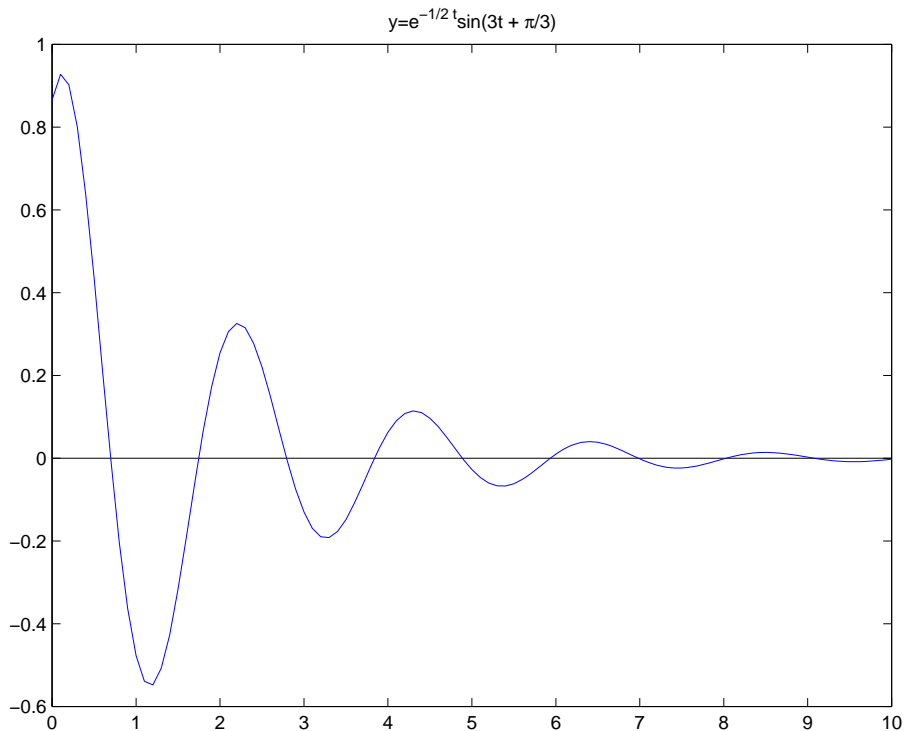
Noem $\nu^2 - k^2 = \omega^2$ (hier gebruik je dat $\nu^2 - k^2 > 0$) dan zijn de oplossingen

$$y(t) = c_1 e^{-kt} \sin(\omega t) + c_2 e^{-kt} \cos(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Omdat $k > 0$ is de limiet als t naar oneindig gaat voor elke oplossing nul. Een equivalente vorm voor de oplossingen is weer

$$y(t) = c_0 e^{-kt} \sin(\omega t + \phi_0), \quad c_0 > 0, \phi_0 \in [0, 2\pi).$$

Als we nu weer $f(t)$ een periodieke aandrijving met periode ω nemen, bijvoorbeeld $f(t) = \sin(\omega t)$, dan treedt er geen resonantie op. Dat doet zich zelfs niet voor als we voor $f(t)$ de functie $e^{-kt} \sin(\omega t)$ nemen, omdat we dan een particuliere oplossing verwachten van de vorm $ate^{-kt} \sin(\omega t) + bte^{-kt} \cos(\omega t)$, en hoewel deze functies een erg groot maximum kunnen hebben is de limiet voor t naar oneindig toch steeds nul.



Opgaven

1 Men zoekt een particuliere oplossing $\phi(x)$ van de lineaire d.v. $ay'' + by' + cy = f(x)$. Welke gedaante van $\phi(x)$ (met onbepaalde coëfficiënten) probeert u, als:

(a) $f(x) = x^3 + \sin 2x$

(b) $f(x) = xe^{2x}$

(c) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 1$

(d) $f(x) = e^x \sin 2x$

2 Bepaal de algemene oplossing:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$

(b) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(c) $y'' + 2y' + y = 0$

(d) $y'' + 2y = 0$

(e) $y'' + 2y' - 8y - 4x^2 = 0$

(f) $y'' = 3e^x + 4y + 8 + \sin x$

(h) $\ddot{x} + \dot{x} = 2t \sin t - \cos t \quad \left[\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right]$

3 Los de volgende beginwaardeproblemen op:

(a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y'(0) = 0$

(b) $\begin{cases} \ddot{x} - x = 2 \cos t - 2t \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \dot{x}(0) = 1$