# Aanvulling bij de cursus Calculus 1

# Complexe getallen

# en

# Volledige inductie

A.C.M. Ran

In dit dictaat worden twee onderwerpen behandeld: complexe getallen en volledige inductie. Ook in het Calculusboek van Adams kun je iets over complexe getallen lezen, namelijk in Appendix I op bladzijden A-1 t/m A-10. De stof wordt daar echter iets minder uitgebreid behandeld en er zijn minder vraagstukken.

# Deel 1 - Complexe getallen

## 1. Invoering van complexe getallen

De vergelijking $x^2 = 2$ heeft geen rationale oplossingen. Er is dus geen breuk $\frac{p}{q}$ waarvan het kwadraat 2 is. Dat heeft er toe geleid dat we de getallen $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ *invoerden* als de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 2$. Getallen als $\sqrt{2}$, $3\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{37}$ zijn wel reële getallen, en ons inmiddels zeer vertrouwd, maar het zijn geen rationale getallen.

Waarom zouden we dan wel tevreden zijn met de vaststelling dat de vergelijking $x^2 = -1$ geen reële oplossingen heeft? Merk op dat de situatie geheel analoog is aan de vaststelling dat $x^2 = 2$ geen rationale oplossingen heeft. We voeren nu twee nieuwe, niet reële getallen in, die we $i$ en $-i$ noemen via de *definitie* $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Complexe getallen zijn alle getallen van de vorm $a+bi$, waar $a$ en $b$ reëel zijn. Dit soort getallen kom je op een natuurlijke manier tegen als je kwadratische vergelijkingen wilt oplossen. We noteren de verzameling van de complexe getallen met $\mathbb{C}$. Dus $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$.

### Vraagstukken:

**1.1** Los op middels kwadraatafsplitsen:

| | |
|---|---|
| a. $x^2 - 8x + 7 = 0$ | f. $x^2 + 12x + 11 = 0$ |
| b. $x^2 - 2x - 3 = 0$ | g. $x^2 - 6x + 4 = 0$ |
| c. $x^2 + 6x + 4 = 0$ | h. $x^2 + 6x + 2 = 0$ |
| d. $x^2 + 4x + 2 = 0$ | i. $x^2 + 22x + 100 = 0$ |
| e. $x^2 - 10x + 7 = 0$ | j. $x^2 + 14x + 14 = 0$ |

**1.2** Los op (eventueel middels kwadraatafsplitsen):

| | |
|---|---|
| a. $x^2 = -4$ | f. $x^2 + 2x + 2 = 0$ |
| b. $x^2 = -17$ | g. $x^2 + 12x + 61 = 0$ |
| c. $x^2 = -20$ | h. $x^2 - 4x + 11 = 0$ |
| d. $(x-2)^2 = -4$ | i. $x^2 - 8x + 36 = 0$ |
| e. $(x+7)^2 = -8$ | j. $x^2 + 22x + 221 = 0$ |

## 2. Rekenen met complexe getallen

Een aantal berekeningen met complexe getallen, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, gaan net zoals het gaat bij uitdrukkingen waar wortels in voorkomen. Nog even ter herhaling: als $a = 2 + 3\sqrt{2}$ en $b = 1 - 5\sqrt{2}$ dan

$$\begin{aligned} a + b &= 3 - 2\sqrt{2} \\ a - b &= 1 + 8\sqrt{2} \\ a \cdot b &= (2 + 3\sqrt{2})(1 - 5\sqrt{2}) = 2 - 7\sqrt{2} - 15(\sqrt{2})^2 = -28 - 7\sqrt{2} \\ \frac{a}{b} &= \frac{2 + 3\sqrt{2}}{1 - 5\sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{1 - 5\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + 5\sqrt{2}}{1 + 5\sqrt{2}} = \frac{32 + 13\sqrt{2}}{-49} = -\frac{32}{49} - \frac{13}{49}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Het rekenen met complexe getallen gaat nu op vergelijkbare wijze. Onthoud daarbij wel dat $i^2 = -1$.

**Voorbeeld:** als $a = 3 + 2i$ en $b = -1 - i$, dan

$$\begin{aligned} a + b &= 2 + i \\ a - b &= 4 + 3i \\ a \cdot b &= (3 + 2i)(-1 - i) = -3 - 5i - 2i^2 = -1 - 5i \\ \frac{a}{b} &= \frac{3 + 2i}{-1 - i} = \frac{(3 + 2i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} \frac{-5 + i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Merk op: bij het delen geldt in beide gevallen dat om een term $x + by$ uit de noemer weg te halen, we teller en noemer vermenigvuldigen met $x - by$. Daarbij maken we dan gebruik van het feit dat $(x + by)(x - by) = x^2 - b^2y^2$.

Voor het complexe getal $z = x + yi$ noemen we het complexe getal $x - yi$ de *complex geconjugeerde* of *complex toegevoegde* van het getal $z$. We noteren dat getal met $z$ met een streepje erboven: $\overline{z}$.

Voor het complexe getal $z = x + yi$ noemen we de reële getallen $x$ en $y$, respectievelijk het *reële deel* en het *imaginaire deel* van $z$. Let op hier: het imaginaire deel van een complex getal is dus reëel!!! We noteren het imaginaire deel met $\operatorname{Im} z$, het reële deel met $\operatorname{Re} z$, dus $\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y$.

## Vraagstukken:

**2.1** Reken uit:

a. $(2+3\sqrt{5})(1+\sqrt{5})$ f. $\frac{2+3\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

b. $(-3+7\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})$ g. $\frac{-3+7\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$

c. $(10+3\sqrt{7})(10-3\sqrt{7})$ h. $\frac{10+3\sqrt{7}}{1-2\sqrt{7}}$

d. $(3+4\sqrt{11})(4+3\sqrt{11})$ i. $\frac{3+4\sqrt{11}}{4-3\sqrt{11}}$

e. $(2+3\sqrt{12})(7+2\sqrt{3})$ j. $\frac{2+6\sqrt{3}}{7-2\sqrt{3}}$

**2.2** Reken uit:

a. $(2+3i)+(1+5i)$ f. $i+3i$ k. $\frac{2+3i}{1+5i}$ p. $\frac{2+i}{i}$

b. $(3-7i)-(1/2+\pi i)$ g. $i^2-(2i)^2$ l. $\frac{3-7i}{1+i}$ q. $\frac{i}{2+i}$

c. $(3-4i)(7+2i)$ h. $i(2-i)$ m. $\frac{3-4i}{7-2i}$ r. $\frac{2+3i}{2-3i}$

d. $(-1+2i)(3-5i)$ i. $(2+3i)^2$ n. $\frac{-1+2i}{3+5i}$ s. $\frac{(4-3i)^2}{(1+i)^2}$

e. $(-2+8i)(-2-8i)$ j. $(5-i)^2-(5+i)^2$ o. $\frac{-2+8i}{7-i}$ t. $\frac{5-2i}{3i}$

**2.3** Bepaal van de volgende complexe getallen de complex geconjugeerde, het reële deel en het imaginaire deel:

a. $3+2i$ d. $7-i$
b. $-4+3i$ e. $11-8i$
c. $-\pi+\sqrt{2}i$ f. $\ln 2+ei$

**2.4** Als $z=2-3i$ en $w=1+2i$ bereken dan

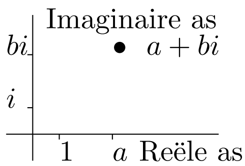
a. $z\cdot\bar{z}$ c. $\frac{z}{1-w}$
b. $\frac{1}{\bar{w}}$ d. $\bar{w}-\frac{i}{\bar{z}}$

## 3. Het complexe vlak, poolcoördinaten, modulus en argument

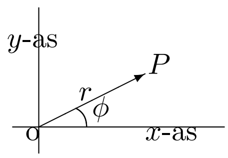
We identificeren een *complex getal* met een punt in het platte vlak:

$$x + iy \leftrightarrow (x, y)$$

waarbij we afspreken $i^2 = (-i)^2 = -1$. We identificeren dus 1 met (1,0) en $i$ met (0,1).




We identificeren reële getallen $x$ met $(x, 0)$. Getallen van de vorm $iy$ heten *imaginaire getallen*, de verzameling $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$ heet de *imaginaire as*.
Punten in het platte vlak kun je ook met *poolcoördinaten* weergeven: elk punt $P$ wordt eenduidig bepaald door de afstand $r$ tot $(0, 0)$ en de hoek $\phi$ die het lijnstuk van $P$ naar $O$ maakt met de positieve $x$-as. Het paar $(r, \phi)$ zijn de poolcoördinaten van $P$, met de afspraak $-\pi < \phi \leq \pi$.




De relatie tussen de twee manieren waarop we nu naar een complex getal kunnen kijken is als volgt: wanneer $P = x + iy$ dan is

$$x = r \cos \phi \text{ en } y = r \sin \phi$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \phi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

- $r$ heet de *modulus* van het complexe getal $z = x + iy$.
  Notatie: $r = |z|$.

- $\phi$ heet de *hoofdwaarde van het argument* van $z$.
  Notatie: $\phi = \operatorname{Arg} z$.

- Elke hoek waarvoor geldt $\phi = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) geeft in de formule die $z$ uitdrukt in $\phi$ en $r$ hetzelfde. We spreken van het *argument* van $z$ als we ons niet langer beperken tot $-\pi < \phi \leq \pi$. Notatie: $\arg z$.

## Vraagstukken:

**3.1** Bereken modulus en hoofdwaarde van het argument van de volgende getallen:
(gebruik zonodig, maar alleen zonodig, je rekenmachine om de hoofdwaarde van het argument te bepalen)

a. $1+i$ e. $3+4i$
b. $1-\sqrt{3}i$ f. $7-24i$
c. $2i$ g. $-4-4i$
d. $-2\sqrt{3}+2i$ h. $-7$

**3.2** Gegeven zijn de modulus en de hoofdwaarde van het argument van een aantal complexe getallen. Druk die getallen uit in de vorm $z=a+bi$.

a. $|z|=\sqrt{2}, \operatorname{Arg} z=\frac{-\pi}{4}$ e. $|z|=10, \operatorname{Arg} z=\frac{2}{3}\pi$
b. $|z|=4, \operatorname{Arg} z=\frac{5}{6}\pi$ f. $|z|=5, \operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{3}$
c. $|z|=\frac{1}{2}, \operatorname{Arg} z=\pi$ g. $|z|=4, \operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2}$
d. $|z|=3, \operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{2}$ h. $|z|=0$

**3.3** Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de volgende complexe getallen:

a. $z_1=-3$ c. $z_2=1+i$
b. $z_3=2i$ d. $z_4=-\sqrt{3}-i$

Bepaal van elk van deze getallen $z$ het reële deel, het imaginaire deel, de modulus en de hoofdwaarde van het argument.

**3.4** Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de complexe getallen $z_1=2+i$, en $z_2=1+2i$. Bereken de volgende getallen en teken hun beeldpunten in het complexe vlak:

a. $z_1+z_2$ c. $z_1-z_2$
b. $z_1\cdot z_2$ d. $\frac{z_1}{z_2}$

**3.5** Teken in het complexe vlak het beeldpunt van een willekeurig complex getal $z$. Geef vervolgens aan waar de beeldpunten liggen van:

a. $\frac{1}{z}$ d. $\bar{z}$
b. $-z$ e. $i\bar{z}$
c. $iz$

**3.6** Laat zien dat voor elk complex getal $z$ geldt dat:
a. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$,
b. $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$,
c. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

**3.7** Laat zien dat voor twee complexe getallen $z$ en $w$ geldt dat $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ en $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$.

## 4. Vermenigvuldigen en delen in termen van modulus en argument

Neem twee getallen $z_1$ en $z_2$, en schrijf $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$. Dan geldt dus: $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2, \arg z_1 = \phi_1, \arg z_2 = \phi_2$. We rekenen nu het product $z_1 z_2$ uit:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= r_1 r_2\big((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)\big) \\ &= r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)) \end{aligned}$$

Hieruit concluderen we (met behulp van $\cos^2 + \sin^2 = 1$) dat

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \phi_1 + \phi_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

Met andere woorden: bij vermenigvuldigen van complexe getallen moet je de moduli van die complexe getallen met elkaar vermenigvuldigen, en de argumenten bij elkaar optellen. Verder, als $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, dan is

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)) \qquad \text{(ga na!)},$$

zodat het argument van het quotiënt gelijk is aan het verschil van de argumenten (modulo $2\pi$) en de modulus van het quotiënt gelijk is aan het quotiënt van de moduli.

### Notatie

We hanteren als notatie $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$. Dan is een complex getal $z$ met modulus $r$ en argument $\phi$ dus te schrijven als:

$$z = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}.$$

Bijvoorbeeld, $z = 4 - 4i$ heeft als modulus $4\sqrt{2}$ en als argument $-\frac{\pi}{4}$, en dus $z = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Omgekeerd, het getal $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ is gelijk aan $z = 2\cos(\frac{\pi}{3}) + 2i\sin(\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$.

**Vraagstukken:**

**4.1** Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 4 - 4i$ en $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

(i) Bereken van beide getallen de modulus en de hoofdwaarde van het argument.

(ii) Bereken de modulus en de hoofdwaarde van het argument van

$$z_1 \cdot z_2^{-1}, \quad z_1^2 \cdot z_2^3 \text{ en } \bar{z}_1^3 \cdot z_2^2$$

(iii) Bereken $z_2^{11}$ en $z_1^{-8}$.

**4.2** Teken in het complexe vlak de beeldpunten van:
a. $\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$ c. $2\sqrt{3} \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i}$
b. $2e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ d. $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$

**4.3** Schrijf in de vorm $re^{i\phi}$:
a. $-5$ c. $-1 + i$
b. $2 + 2\sqrt{3}i$ d. $-4i$

**4.4** Teken in het complexe vlak het beeldpunt van een willekeurig complex getal $z$. Geef vervolgens aan waar de beeldpunten liggen van:
a. $z \cdot e^{\pi i}$
b. $z \cdot e^{-\frac{\pi i}{2}}$
c. $z \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$

## 5. De Moivre's stelling

Als $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, dan is

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi), \\ z^3 &= r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi), \end{aligned}$$

vanwege het feit dat je bij vermenigvuldiging van twee complexe getallen de moduli met elkaar moet vermenigvuldigen en de argumenten bij elkaar moet optellen.
In het algemeen:

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Dus hebben we in het bijzonder voor $r = 1$:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Dit staat bekend als *de stelling van De Moivre*. Door $z^n$ ook op een andere wijze uit te rekenen krijg je aardige goniometrische identiteiten.
Bijvoorbeeld:
$z^2 = (r\cos\phi + ri\sin\phi)^2 = r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2ir^2\cos\phi\sin\phi$ enerzijds, maar aan de andere kant is $z^2 = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$.
Dus volgt dat
$r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2ir^2\cos\phi\sin\phi = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$,
en dus dat
$(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2i\cos\phi\sin\phi = \cos 2\phi + i\sin 2\phi$.
Omdat de reële delen aan elkaar gelijk moeten zijn, en de complexe delen ook aan elkaar gelijk moeten zijn, concluderen we dat

$$\begin{aligned} \cos 2\phi &= \cos^2\phi - \sin^2\phi, \text{ en} \\ \sin 2\phi &= 2\cos\phi\sin\phi, \end{aligned}$$

wat inderdaad bekende gonio-regels zijn!

**Vraagstukken:**

**5.1** Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. In deze som is $k$ steeds een geheel getal.

| | |
|---|---|
| a. $2e^{2k\pi i}$ | e. $7e^{\frac{k\pi}{4}i}$ |
| b. $e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}$ | f. $3e^{(\frac{2}{3}+k)\pi i}$ |
| c. $2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{k\pi}{2}i}$ | g. $e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{k\pi}{3}i}$ |
| d. $e^{k\pi i}$ | h. $e^{(-\frac{5}{6}+\frac{k}{3})\pi i}$ |

**5.2** Voor twee reële getallen $a$ en $b$ geldt:

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^8}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6} = a + bi.$$

Bereken $a$ en $b$.

**5.3** Bereken

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^{30}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{20}}.$$

## 6. Oplossen van vergelijkingen

Met behulp van de stelling van de Moivre kunnen we nu vergelijkingen oplossen. We beginnen met enkele voorbeelden van simpele vergelijkingen waarbij we rechtstreeks de stelling kunnen toepassen.
Bekijk eerst, voor een vast gegeven $n$, de vergelijking

$$z^n = 1.$$

Schrijf $z = re^{i\phi}$. Volgens De Moivre is $z^n = r^n e^{in\phi}$, dus $z^n = r^n e^{in\phi} = 1 = 1 \cdot e^{i(0+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Vergelijk nu de moduli en de argumenten:

$$r^n = 1 \quad , \quad n\phi = 2k\pi.$$

Het lijkt alsof we hiermee niets winnen. Immers in plaats van $z^n = 1$ moeten we oplossen $r^n = 1$. Bedenk echter dat $r$ een reëel getal is en dat $r > 0$. Dus $r = 1$. Verder is $\phi = \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Het lijkt nu alsof er oneindig veel oplossingen zijn, namelijk $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$. Maar voor $k = n$ staat er hetzelfde als voor $k = 0$; voor $k = n+1$ hetzelfde als voor $k = 1$, enz. Dus: $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, met $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Als volgend voorbeeld bekijken we de vergelijking

$$z^4 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Stel $z = re^{i\phi}$. Weer volgt

$$z^4 = r^4 e^{i4\phi} = 1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vergelijk weer modulus en argument:

$$r^4 = 2 \quad , \quad 4\phi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Er zijn maar vier verschillende oplossingen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{12}i} \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{7\pi}{12}i} \\ z_3 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{13}{12}\pi i} = -2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{12}i} \\ z_4 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{19}{12}\pi i} = -2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{7\pi}{12}i} \end{aligned}$$

Voor alle andere waarden van $k$ krijg je één van deze vier weer terug.

## Vraagstukken:

**6.1** Los de volgende vergelijkingen op:

| | | |
|---|---|---|
| a. $z^3 = 8$ | e. $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ | i. $(z - 2 + i)^2 = 9i$ |
| b. $z^2 = -i$ | f. $(z - 2i)^3 = i$ | j. $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$ |
| c. $z^8 = -1$ | g. $z^4 + 1 = \sqrt{3}i$ | k. $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$ |
| d. $z^6 = 64i$ | h. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ | l. $z^4 - 2iz^2 - 1 = 0$ |

**6.2** Gebruik de formules voor $\cos(2\phi)$ (en eventueel $\sin(2\phi)$) om uit $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ te concluderen dat $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}}$ en $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$. Druk daarmee de oplossingen van $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$ uit in de vorm $z = a + bi$.

**6.3*** Laat $\alpha$ een vast getal zijn. Los op:
a. $z^4 - 2z^2 \sin\alpha + 1 = 0$
b. $z^6 - 2z^3 \cos\alpha + 1 = 0$

**6.4*** Los op: $(z + 1)^7 + (z - 1)^7 = 0$.
Aanwijzing: noem $\frac{z+1}{z-1}$ even $w$, en geef eerst aan welke complexe waarden $w$ kan hebben.

## 7. Tweedegraadsvergelijkingen

We beginnen met een simpel voorbeeld: los op in complexe getallen de vergelijking $z^2+4z+5=0$. We gaan eerst kwadraat afsplitsen: $(z+2)^2+1=0$, ofwel $(z+2)^2=-1$. Dat kunnen we oplossen: Noem $z+2=w$. Dan staat er $w^2=-1$, ofwel $w=\pm i$, dus $z+2=\pm i$, dus $z=-2\pm i$.

Een iets lastiger voorbeeld: los op $z^2-2z+8-24i=0$. Eerst weer kwadraat afsplitsen:

$$(z-1)^2+7-24i=0,$$

ofwel $(z-1)^2=-7+24i$. Noem nu $z-1=w$. Dan staat er

$$w^2=-7+24i=25(-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i)$$

waarbij 25 de modulus is van $-7+24i$.
Schrijf nu $w=re^{i\phi}$. Dan $w^2=r^2e^{i2\phi}$. Dus

$$r^2=25,\quad \cos 2\phi=-\frac{7}{25},\quad \sin 2\phi=\frac{24}{25}.$$

Dat levert $r=5$. Gebruik nu dat

$$\begin{aligned}\cos 2\phi &= 2\cos^2\phi-1,\\ \sin 2\phi &= 2\cos\phi\sin\phi;\end{aligned}$$

dat geeft $\cos^2\phi=\frac{9}{25}$, ofwel $\cos\phi=\pm\frac{3}{5}$; $\cos\phi=\frac{3}{5}$ geeft $\sin\phi=\frac{4}{5}$, en $\cos\phi=-\frac{3}{5}$ geeft $\sin\phi=-\frac{4}{5}$.
Dus: $w=5(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)=3+4i$ òf $w=5(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i)=-3-4i$. Voor $z$ levert dat $(z-1=w)$ : $z=4+4i$ òf $z=-2-4i$.

Nog een voorbeeld: los op $z^2+(-3+i)z+4=0$. Kwadraat afsplitsen:

$$(z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i))^2-(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i)^2+4=0,$$

met andere woorden

$$(z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i))^2+4-(2-\frac{3}{2}i)=0,$$

ofwel $(z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i))^2=-2-\frac{3}{2}i=\frac{5}{2}(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i)$.
Noem $z+(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i)=w=re^{i\phi}$, dan is $r^2=\frac{5}{2}$, dus $r=\sqrt{\frac{5}{2}}$, en $\cos 2\phi=2\cos^2\phi-1=-\frac{4}{5}, \sin 2\phi=-\frac{3}{5}$. Dat levert $\cos\phi=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. Voor $\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}$ krijgen we $\sin\phi=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ en $\cos\phi=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ geeft $\sin\phi=\frac{3}{\sqrt{10}}$.
Dus: $w=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}i)=\pm(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)$, zodat $z=2-2i$ of $z=1+i$.

**Vraagstukken:**

**7.1** Los de volgende vergelijkingen op. (In deze serie hoef je alleen maar kwadraat af te splitsen en daarna kun je direct de vergelijking oplossen).
a. $z^2 - 2iz + 2 = 0$
b. $z^3 - 4z^2 + 13z = 0$
c. $z^2 + (2 - 2i)z - 2 - 2(1 + \sqrt{3})i = 0$
d. $z^2 - z(2 + 2i) + 2i - 1 = 0$
e. $z^2 + (2 - 2i)z + 4 - 2i = 0$
f. $z^2 - (4 - 6i)z - (5 + 10i) = 0$
g. $(1 + 2i)z^2 + (12 - 6i)z - 13 - 26i = 0$

**7.2** Los de volgende tweedegraadsvergelijkingen op.
a. $z^2 - (2 + 6i)z = -12i$
b. $z^2 - (4 + 2i)z = -8i$
c. $z^2 - 2iz - 6 - 12i = 0$
d. $z^2 - 2z - (2 - 4i) = 0$
e. $z^2 + (-2 + 4i)z + 2 - 16i = 0$

**7.3** a. Laat zien dat $z = 1$ een oplossing is van $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0$ en bepaal de andere (complexe) oplossingen.
b. Laat zien dat $z = i$ een oplossing is van de vergelijking $z^3-(6+3i)z^2+(3+16i)z+(10-5i) = 0$, en bepaal de andere oplossingen.
c. Laat zien dat $z = -1$ een oplossing is van $(3+4i)z^2+5z+(2-4i) = 0$ en bepaal de andere oplossing.

## 8. Toepassingen

Als voorbeeld van hoe verzamelingen van complexe getallen bekende meetkundige figuren kunnen opleveren doen we het volgende voorbeeld:
Bepaal in het complexe vlak de getallen $z$ die voldoen aan

$$|z - (2 + 4i)| = 9.$$

Oplossing: stel $z = x + iy$, we gaan nu een vergelijking in $x$ en $y$ opstellen waaraan het punt moet voldoen. We hebben:

$$|z - (2 + 4i)| = |(x - 2) + i(y - 4)| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2}.$$

Dus, $|z - (2 + 4i)| = 9$ is equivalent met

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 81.$$

Zoals bekend stelt dit in het platte vlak een cirkel voor met middelpunt $(2, 4)$ en straal 9. De verzameling van alle complexe punten $z$ waarvoor $|z - (2 + 4i)| = 9$ is dus de cirkel met middelpunt $2 + 4i$ en straal 9.

## Vraagstukken:

**8.1** "Meetkundige plaatsen"
Geef in het complexe vlak aan waar de beeldpunten liggen van de getallen $z$ die voldoen aan:

a. $|z - 3i| < 5$
b. $\operatorname{Re} z \geq -\operatorname{Im} z$
c. $\operatorname{Arg} \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{2}$
d. $|z - i| = \operatorname{Im}(z + i)$
e. $|z - 3i| = |4 + 2i - z|$
f. $\operatorname{Re}(z - 5 + 2i) = 1$
g. $\operatorname{Im} \frac{z-3}{z+2i} = 0$
h. $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$ en $|z + 2| = |z - 2 - 4i|$.

**8.2*** Toon aan
a. Als $|z - 1| = 2$ dan is $\frac{z+1}{z-3}$ zuiver imaginair ($z \neq 3$).
b. Als $|z| = 2$, dan is $\frac{z^2-5z+4}{2z}$ reëel.
c. Als $|z| = 1$, dan is $\left|\frac{2z-1}{z-2}\right| = 1$.
d. Als $|z| = 1$, dan is $\frac{z^2-1}{z}$ zuiver imaginair.
e. Zij $f(x) = \frac{z^2-z+1}{2z}$. Als $|z| = 1$ dan is $f(z)$ reëel, en $f(z) = f(\bar{z})$.

# Deel 2 - Volledige inductie

## 1. Het somteken en inleiding volledige inductie

Binnen de wiskunde komt het vaak voor dat we een rij getallen aan het optellen (sommeren) zijn. Dat leidt soms tot lange formules met puntjes, bijvoorbeeld:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100.$$

Daarom is door de Zwitserse wiskundige Euler een verkorte notatie bedacht. We spreken af:

Als we een eindig stel getallen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ hebben, dan noteren we

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

De letter $\sum$ (spreek uit "sigma") is de Griekse hoofdletter S, die staat voor "som". Zo geldt er dus bijvoorbeeld

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60},$$

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sum_{k=1}^{4} x_{2k} = x_2 + x_4 + x_6 + x_8,$$

en

$$\sum_{k=1}^{4} x_{k+1} = x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

In het laatste geval schrijven we in plaats van $x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ ook wel $\sum_{k=2}^{5} x_k$, wat ons leidt tot de volgende algemenere afspraak.

Als $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ getallen zijn (waarbij $p \leq q$) dan noteren we

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

Zo is dan

$$\sum_{k=2}^{4} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29,$$

en

$$\sum_{k=3}^{6} x_{k-1} = x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

In plaats van de letter $k$ die in deze notatie voorkomt, mag men elke andere gewenste letter nemen. Zo is

$$\sum_{j=2}^{5} x_j = x_2 + x_3 + x_4 + x_5,$$

en

$$\sum_{i=4}^{7} x_{i-2} = x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

Uit deze voorbeelden ziet men dat bijvoorbeeld

$$\sum_{j=2}^{n} u_j = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{i=3}^{n+1} u_{i-1} = \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

Verder geldt blijkbaar

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 \qquad \text{en} \qquad \sum_{k=1}^{m+1} x_k = \sum_{k=1}^{m} x_k + x_{m+1}$$

We gaan nu naar het eigenlijke onderwerp van dit hoofdstuk: Volledige inductie. Volledige inductie is een methode om beweringen te bewijzen die voor *alle* natuurlijke getallen $n$ (dus voor $n = 1, 2, 3, 4, \dots$) waar zijn. De manier waarop je hierbij te werk gaat is als volgt:

(i) Laat eerst zien dat het waar is voor $n = 1$ (de zogenaamde *basisstap*).

(ii) Laat dan zien dat *als* het waar is voor een getal $m$ *dan* is het ook waar voor het getal $m + 1$ (de zogenaamde *inductiestap*).

Eerst een voorbeeld van hoe je dan te werk gaat: de bewering is dat voor elk natuurlijk getal $n$ geldt $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1)$. Anders geschreven, we beweren dat

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Dat wist je misschien al, en een elegant bewijs is de bekende truc:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= S \\ n + (n-1) + \cdots + 1 &= S \end{aligned}$$

dus $n(n+1) = 2S$.

We bewijzen het nu echter met volledige inductie. Eerst de basisstap:
Voor $n = 1$ is $\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{1} j = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2$, en dus is de bewering juist voor $n = 1$.
Nu de inductiestap: stel de bewering is waar voor $n = m$, dus

$$\sum_{j=1}^{m} j = \frac{1}{2}m(m+1).$$

(Dit is de zogenaamde *inductieaanname* of *inductiehypothese*.) We willen nu laten zien dat de bewering ook waar is voor $n = m + 1$, dus we willen laten zien dat

$$\sum_{j=1}^{m+1} j = \frac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

Dat gaat als volgt. Voor $n = m + 1$ geldt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} j &= 1 + 2 + 3 + \cdots + m + (m+1) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} j\right) + (m+1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + m) + (m+1). \end{aligned}$$

Tot nu toe is er niets gebeurd, we hebben alleen die ingewikkelde som nu zo herschreven dat we er een stuk in herkennen waarop we de inductieaanname kunnen loslaten. Als we dat doen dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} j &= (1 + 2 + 3 + \cdots + m) + (m+1) \\ &= \frac{1}{2}m(m+1) + (m+1). \end{aligned}$$

Nu zijn we bijna waar we zijn willen, we moeten alleen even wat algebra toepassen om dit te herschrijven in de goede vorm. Dat doen we door $m + 1$ buiten haakjes te halen.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} j &= \frac{1}{2}m(m+1) + (m+1) \\ &= \left(\frac{1}{2}m + 1\right)(m+1) \\ &= \frac{1}{2}(m+2)(m+1), \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap een factor $\frac{1}{2}$ buiten haakjes hebben gehaald. Zo je ziet is dat wat we wilden bewijzen.

We beweren nu, dat als je zowel de basistap als de inductiestap gedaan hebt, dat je dan het bewijs voor alle natuurlijke getallen hebt geleverd. Waarom is dat zo? Stel je voor dat je zou willen laten zien dat de bewering uit ons voorbeeld waar is voor $n = 100$. Welnu, volgens de basistap is de bewering waar voor $n = 1$. Volgens de inductiestap: als de bewering waar is voor het natuurlijke getal 1 dan is hij ook waar voor het getal 2. Pas nogmaals de inductiestap toe, maar nu met $m = 2$. Omdat de bewering waar is voor 2 is hij ook waar voor 3. Nu nogmaals de inductiestap: omdat de bewering waar is voor 3 is hij waar voor 4. Enzovoorts, tot je uiteindelijk ook laat zien: de bewering is waar voor 99. Dan de laatste keer de inductiestap: de bewering is waar voor 100 omdat je al hebt laten zien dat hij waar is voor 99.

Vergelijk een bewijs met volledige inductie met traplopen: als je op de eerste tree kunt komen (de basisstap), en je weet hoe je van een willekeurige tree naar één tree hoger kunt komen (de inductiestap), dan kun je elke trap beklimmen, hoe hoog die ook is. Een andere manier om er tegenaan te kijken is het omvallen van dominostenen. Zolang het zo is dat voor elke $n$ na de $n$'de dominosteen de $n+1$'ste omvalt (de inductiestap), dan vallen ze allemaal om als we de eerste om doen vallen (de basisstap).

## Vraagstukken:

**1.1** Bewijs telkens met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$

d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(1+n)$

e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+3)!}{k!} = \frac{1}{4}\frac{(n+4)!}{n!}$

f. $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{2(n+1)}$

g. $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} (3k-1) = n(6n+7)$

h. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n$

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

j. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

k. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Het symbool $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}$ betekent hier dat je het product moet nemen in plaats van de som.

Bijvoorbeeld $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$.

**1.2** Een voorbeeld waaruit blijkt dat de basisstap echt nodig is.

Bekijk de bewering $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{8}(2n+1)^2$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

a. Laat zien dat de inductiestap bij deze bewering correct is (m.a.w. geef een inductiebewijs zonder de basisstap).

b. Is deze bewering waar?

## 2. Deelbaarheid

We behandelen nu een paar voorbeelden waarbij een bewijs met volledige inductie goed van pas komt. De bewering is dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ het getal $9^n - 4^n$ deelbaar is door 5. We bewijzen dit met volledige inductie.
Eerst de basisstap: voor $n = 1$ staat er de bewering dat $9 - 4$ deelbaar is door 5, en dat is natuurlijk ook zo.
Nu de inductiestap. Stel dat $9^m - 4^m$ deelbaar is door 5 (dat is de inductieaanname). We moeten nu laten zien dat daaruit volgt dat $9^{m+1} - 4^{m+1}$ deelbaar is door 5. Dat gaat als volgt. Je moet natuurlijk ergens die inductieaanname gebruiken, dus we herschrijven

$$9^{m+1} - 4^{m+1} = 9 \cdot (9^m - 4^m) + 9 \cdot 4^m - 4^{m+1}.$$

Nu is het eerste deel mooi deelbaar door 5 vanwege de inductieaanname. Dus hoeven we alleen nog te laten zien dat de laatste twee termen samen deelbaar zijn door 5. Maar $4^{m+1} = 4 \cdot 4^m$. Dus, als we alles even samen nemen:

$$\begin{aligned} & 9^{m+1} - 4^{m+1} = 9 \cdot (9^m - 4^m) + 9 \cdot 4^m - 4 \cdot 4^m = \\ = \;& 9 \cdot (9^m - 4^m) + (9 - 4) \cdot 4^m = \\ = \;& 9 \cdot (9^m - 4^m) + 5 \cdot 4^m. \end{aligned}$$

Nu zie je dat de eerste term deelbaar is door 5 vanwege de inductieaanname, en de tweede term is ook deelbaar door 5. Dus is het geheel deelbaar door 5, en de inductiestap is voltooid.

Nog een voorbeeld om het principe nogmaals te laten zien. Toon aan dat
$2 \cdot 3^{2n+2} + 3 \cdot 2^n$ deelbaar is door 42 voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Basisstap: $2 \cdot 3^{2 \cdot 1+2} + 3 \cdot 2^1 = 168 = 4 \cdot 42$, dus de uitspraak is waar voor $n = 1$.
Inductiestap: neem aan dat de uitspraak waar is voor $n = m$, dus $2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m$ is deelbaar door 42. We bewijzen dat de uitspraak dan ook waar is voor $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{2(m+1)+2} + 3 \cdot 2^{m+1} &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) - 4 \cdot 3^{2m+2} + 2 \cdot 3^{2(m+1)+2} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) - 4 \cdot 3^{2m+2} + 2 \cdot 9 \cdot 3^{2m+2} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) + 14 \cdot 3^{2m+2} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 3^{2m+2} + 3 \cdot 2^m) + 42 \cdot 3^{2m+1}. \end{aligned}$$

Nu zijn beide termen deelbaar door 42, en dus is de inductiestap voltooid.

## Vraagstukken:

**2.1** Deelbaarheid.
Bewijs met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

a. $7^n - 3^n$ is deelbaar door 4
b. $7^n + 3^{n+1}$ is deelbaar door 4
c. $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is deelbaar door 7
d. $5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$ is deelbaar door 7
e. $4^{2n+1} + 5 \cdot 7^n$ is deelbaar door 9
f. $7^{2n} - 5^{2n}$ is deelbaar door 12
g. $9^{2n} + 3 \cdot 4^{2n+1}$ is deelbaar door 13
h. $4^{2n} + 11 \cdot 2^{2n}$ is deelbaar door 6
i. $3 \cdot 9^{2n} + \cdot 3^{2n+2}$ is deelbaar door 12
j. $7^n + 2 \cdot 4^n$ is deelbaar door 3

**2.2** Bewijs met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

a. $3^{2^n} - 1$ is deelbaar door $2^{n+2}$
b. $3^{2^n} - 1$ is niet deelbaar door $2^{n+3}$
c. $x^n - y^n$ is deelbaar door $x - y$ $(x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)$
d. $x^{2n} - y^{2n}$ is deelbaar door $x + y$, $(x, y \in \mathbb{R}, x \neq -y)$
e. $x \cdot y^{2n} + y \cdot x^{2n}$ is deelbaar door $x + y$, $(x, y \in \mathbb{R}, x \neq -y)$

## 3. De binomiaalformule van Newton

Iedereen is bekend met het *merkwaardig product*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Sommigen weten ook dat

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

en iemand die zin heeft om te rekenen vindt

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Al deze formules zou je als merkwaardige producten kunnen zien. We vragen ons nu af of we een algemene formule kunnen geven die vertelt wat de uitwerking van de tweeterm $(a+b)^n$ is voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$. Als je kijkt naar de drie voorbeelden hierboven, dan kun je verwachten dat de formule er als volgt uit moet zien:

$$(a+b)^n = C_0 \cdot a^n + C_1 \cdot a^{n-1}b + C_2 \cdot a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}ab^{n-1} + C_nb^n,$$

waarbij $C_0, C_1, \ldots, C_n$ nader te bepalen getallen zijn. Deze getallen worden de *binomiaal-coëfficiënten* (binomium betekent tweeterm). We weten dus al dat $C_1 = 2$ als $n = 2$ en $C_1 = 4$ als $n = 4$. Eigenlijk is de notatie $C_k$ voor deze coëfficiënten niet volledig. Ze zijn namelijk afhankelijk van de factor $a^{n-k}b^k$ waar ze vandaan komen én van $n$. We schrijven daarom in plaats van $C_k$ even $C_k^n$. Merk op dat met bovenstaande voorbeelden dan volgt dat bijvoorbeeld $C_1^2 = 2$ en $C_1^4 = 4$.

De vraag is: Wat is $C_k^n$? Het antwoord is afkomstig van de Engelse wis- en natuurkundige Newton, maar voor we dat kunnen geven moeten we eerst een notatie invoeren.

Voor een geheel getal $n \geq 0$ schrijven we

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{als } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{als } n = 0 \end{cases}.$$

We spreken $n!$ uit als *n-faculteit* en er geldt dus bijvoorbeeld dat $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ en $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$. Wat in het laatste voorbeeld gebruikt wordt is (duidelijk) een algemene eigenschap van faculteiten:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Nu zijn we in staat het door Newton gevonden antwoord op de vraag te geven:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

We zullen eens controleren of het klopt voor $n = 4$ en $k = 3$. Uit de voorbeelden volgt $C_3^4 = 4$. Invullen in de formule levert

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4$$

Voor deze waarden van $n$ en $k$ klopt het dus. Dat het altijd klopt is te bewijzen met volledige inductie, iets dat we verderop zullen laten zien Eerst nog wat over de $C_k^n$: De gebruikelijke notatie voor het rechterlid is $\binom{n}{k}$ [spreek uit: "$n$ boven $k$"], dus

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ voor } 0 \leq k \leq n.$$

**Opmerking:** Dit symbool heeft ook nog een andere betekenis. Het geeft namelijk het aantal deelverzamelingen van $k$ elementen in een verzameling van $n$ elementen aan: "het aantal $k$-keuzen uit $n$". Vandaar dat men ook wel uitspreekt "$n$ kies $k$".
Ook het symbool $n!$ heeft een dergelijke betekenis, het geeft namelijk het aantal manieren aan waarop men $n$ voorwerpen kan rangschikken (d.w.z. op een rij zetten).

In de volgende stelling noemen we drie veel gebruikte eigenschappen van binomiaalcoëfficiënten op.

**Stelling:** Laat $n,\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dan geldt

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ voor $0 \leq k \leq n$.
2. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ voor $0 \leq k \leq n$
3. $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ voor $1 \leq k \leq n$.

**Bewijs:** De eerste eigenschap volgt direct uit de definitieformule voor $C_k^n$. De tweede is eenvoudig na te gaan door in dezelfde definitieformule de teller te schrijven als

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot(n-k)!.$$

We bewijzen de derde eigenschap.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1-k) + n!\cdot k}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen.

De eerste twee eigenschappen worden met name gebruikt bij het berekenen van binomiaalcoëfficiënten, terwijl de derde vaak wordt gebruikt in (inductie-)bewijzen. Op de derde eigenschap berust ook de zogenaamde *driehoek van Pascal*

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} &&&&&\binom{0}{0}&&&&& \\ &&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&& \\ &&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&& \\ &&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&& \\ &\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}& \\ \binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5} \end{array}$$

Elk getal erin is de som van de beide getallen links- en rechtsboven (voorzover aanwezig). De randen worden gevormd door de getallen $\binom{n}{0} = 1$ en $\binom{n}{n} = 1$.

We kennen nu genoeg eigenschappen van binomiaalcoëfficiënten om de gevraagde formule voor $(a+b)^n$ te bewijzen.

**Stelling:** De binomiaalformule van Newton luidt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

waarbij $a$ en $b$ willekeurige (reële) getallen zijn en $n \geq 0$ een geheel getal.

**Bewijs:** (Door inductie naar $n$) Laat $a$ en $b$ willekeurig gegeven zijn.

(i) (Basis) $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = (a+b)^0$.

(ii) (Inductiestap) Zij $m \geq 0$ een geheel getal en neem aan dat de uitspraak waar is voor deze $m$ (dus $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$). We bewijzen dat de uitspraak dan ook waar is voor $n = m+1$. Welnu,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} \\
&= a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} + a^0 b^{m+1} \\
&\overset{(1)}{=} a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} a^{m-l+1} b^l + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l-1} a^{m-l+1} b^l + b^{m+1} \\
&= a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m} (\binom{m}{l} + \binom{m}{l-1}) a^{m-l+1} b^l + b^{m+1} \\
&\overset{(2)}{=} a^{m+1} + \sum_{l=1}^{m} \binom{m+1}{l} a^{m-l+1} b^l + b^{m+1} \\
&= \sum_{l=0}^{m+1} \binom{m+1}{l} a^{m-l+1} b^l.
\end{aligned}$$

Bij het =-teken genummerd door (1) hebben we in de eerste som de $k$ vervangen door een $l$, en in de tweede som hebben we $l$ geschreven voor $k+1$.

Bij het =-teken genummerd door (2) hebben we gebruik gemaakt van eigenschap (iii) van de eerder genoemde stelling.

Hiermee is de stelling bewezen.

Een toepassing:
Bereken de coëfficiënt van $x^4$ in de binomiaalontwikkeling van $(2x^3 - \frac{1}{x})^8$.

Antwoord: Volgens de binomiaalformule van Newton geldt

$$\begin{aligned}(2x^3 - \frac{1}{x})^8 &= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (2x^3)^{8-k} \cdot (-\frac{1}{x})^k \\ &= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot 2^{8-k} \cdot x^{3(8-k)} \cdot (-1)^k x^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{8} (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot \binom{8}{k} \cdot x^{24-4k}.\end{aligned}$$

Het gaat ons om de waarde van $k$ zo dat $24 - 4k = 4$, dus $k = 5$. De betreffende coëfficiënt is dus

$$(-1)^5 \cdot 2^3 \cdot \binom{8}{5} = -8 \cdot \binom{8}{3} = -8 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -448$$

## Vraagstukken:

**3.1** Voor een functie $h(x)$ noteren we de $n$-de afgeleide met $h^{(n)}$. Bewijs met volledige inductie de formule van Leibniz voor de $n$-de afgeleide van een product van twee functies $f$ en $g$. Die formule ziet er als volgt uit:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)}.$$

Aanwijzing: het bewijs volgt precies dezelfde stappen als het bewijs van de binomiaalformule.

**3.2** Door in de binomiaalformule geschikte getallen voor $a$ en $b$ in te vullen kun je allerlei interessante formules verkrijgen. Laat zien dat:
a. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
b. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
c. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.
Bereken
d. $\sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} 2^k (-3)^{28-k}$
e. $\sum_{k=0}^{30} \binom{31}{k} 4^k (-2)^{30-k}$.
f. Bewijs de formule in onderdeel a direct met volledige inductie.
g. Bewijs: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, $n, k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n$.

**3.3** Nog wat formules op basis van afgeleide en primitieve van $(1+x)^n$.
a. $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$
b. $\frac{1}{n+1}\left((1+x)^{n+1}-1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}$
c. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0$
d. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
e. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

**3.4** Deze opgave betreft hogere afgeleiden.
a. Zij $f(x) = \sin x$. Laat met behulp van volledige inductie zien dat

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}n\pi\right).$$

b. Bepaal voor de volgende functies een formule voor de $n$-de afgeleide en bewijs die formule met volledige inductie: i. $f_1(x) = \cos x$
ii. $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$
iii. $f_3(x) = \ln x$.
c. Bewijs dat $\frac{d^n}{dx^n}f(ax) = a^n f^{(n)}(ax)$. Leid vervolgens hiermee en met de formule uit a een formule af voor $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x)$.
d. De functie $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1}.$$

Toon aan, met volledige inductie,

$$f^{(n)} = (-1)^n n! \left\{(x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}\right\}.$$

**3.5**
a. Bepaal de coëfficiënt van $x^{-10}$ in de ontwikkeling van $\left(3x^4 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{11}$
b. Bepaal de coëfficiënt van $x^{-20}$ in de ontwikkeling van $\left(2x - \dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$