

# 1 Stelsels lineaire vergelijkingen.

Ter herinnering: op het vwo leer je twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen.

**Voorbeeld:**

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Twee keer de eerste vergelijking van de tweede afhalen geeft:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -5y = -10 \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking vinden we  $y = 2$ ; door dit in te vullen in de eerste vergelijking vinden we dan  $x = -1$ . De oplossing is dus  $x = -1$ ,  $y = 2$ .

Hoe nu te handelen met stelsels van  $n$  vergelijkingen met  $m$  onbekenden?

**Voorbeeld:**

Los op:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 0 \\ x + 5y + 12z = 0 \end{cases}$$

De tweede min de eerste vergelijking, en de derde min de eerste vergelijking geeft:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 2z = -3 \\ 3y + 9z = -3 \end{cases}$$

Werk nu verder met de tweede en derde als met twee vergelijkingen met twee onbekenden - trek drie keer de tweede vergelijking van de derde af:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

De derde vergelijking geeft nu  $z = 2$ . Dit invullen in de tweede vergelijking geeft  $y = -7$ . Deze beide gegevens invullen in de eerste vergelijking geeft  $x = 11$ . De oplossing luidt nu in vectornotatie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wat we doen is het volgende: tel veelvouden van de eerste vergelijking op bij de tweede, derde enz, en zorg er zo voor dat alleen in de eerste vergelijking nog een  $x$  voorkomt. Dit noemen we *(weg)vegen* van  $x$  uit de tweede, derde, enz. vergelijking. Veeg vervolgens uit de derde, vierde enz. de  $y$  weg op dezelfde wijze. Ga zo door tot je tenslotte één vergelijking met één onbekende overhoudt. Los die op, vul het antwoord in en vind daarmee successievelijk alle andere onbekenden. Een dure term voor deze methode is *Gauss-eliminatie*.

**Voorbeeld:**

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 4y + 9z = 36 \end{cases}$$

Trek de eerste vergelijking af van de tweede en derde:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 8 \\ 3y + 8z = 30 \end{cases}$$

Trek nu drie keer de tweede vergelijking af van de derde:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 8 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Dit geeft (van onderen naar boven) dat  $z = 3$ ,  $y = 2$ ,  $x = 1$ . De oplossing is dus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Het schrijfwerk beperk je aanzienlijk door alle  $x, y, z, +, =$  weg te laten.

We bekijken de voorbeelden opnieuw.

**Voorbeelden:**

1. Het eerste voorbeeld wordt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

De tweede min de eerste en de derde min de eerste geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

De derde min drie keer de tweede geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

De “invulstep” kun je nu als volgt doen: de derde keer  $\frac{1}{3}$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De eerste min drie keer de derde, en de tweede min twee keer de derde geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De eerste min twee keer de tweede geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Het antwoord staat nu in de kolom rechts, en luidt dus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Het tweede voorbeeld wordt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

De tweede min de eerste en de derde min de eerste geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

De derde min drie keer de tweede geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

De derde keer  $\frac{1}{2}$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

De eerste min de derde, en de tweede min twee keer de derde geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

De eerste min de tweede geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Het antwoord staat weer in de kolom rechts en luidt dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Nog maar een voorbeeld. Los op het stelsel:

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 0 \\ 5x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Dit gaat als volgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De tweede min vijf keer de eerste, en de derde min de eerste geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -24 & -16 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

De derde min  $\frac{1}{8}$  keer de tweede geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -24 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schrik! Wat nu? De situatie voor de tweede en derde vergelijking in de tweede stap is:

$$\begin{cases} -24y - 16z = 0 \\ -3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Op een factor 8 na is dat twee keer dezelfde vergelijking. We kunnen nu na stap drie wèl  $y$  uitdrukken in  $z$  (middels de tweede vergelijking). Door dit in te vullen in de tweede vergelijking kunnen we óók  $x$  uitdrukken in  $z$ . Daarmee hebben we dan alle oplossingen: na stap drie:

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 0 \\ -24y - 16z = 0 \end{cases}$$

geeft  $y = -\frac{2}{3}z$ , dus  $0 = x + 5y + 3z = x - \frac{10}{3}z + 3z = x - \frac{1}{3}z$ , ofwel  $x = \frac{1}{3}z$ .

Dus:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} \cdot z$  is voor elke  $z \in \mathbb{R}$  een oplossing, en dit zijn ook alle oplossingen.

Op dezelfde manier ga je te werk met een stelsel van twee vergelijkingen met drie onbekenden (of in het algemeen:  $m$  vergelijkingen met  $n$  onbekenden).

**Voorbeelden:**

1.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

Dit werk je als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dat geeft  $y = z - 1$ ,  $x = -2z + 1$ . In vectornotatie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Tenslotte nog een voorbeeld waar er meer vergelijkingen dan onbekenden zijn:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

Dit werk je als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uit de laatste twee zien we  $y = -2$  en  $-2y = 1$ . Dat geeft een tegenstrijdigheid, dus er is nu geen enkele oplossing.

In het algemeen geldt voor stelsels lineaire vergelijkingen: er is òf geen oplossing, òf precies één oplossing, òf er zijn oneindig veel oplossingen.

## 2 Matrices

### 2.1 Invoeren van het begrip matrix.

In hoofdstuk 1 hebben we bij een stelsel lineaire vergelijkingen voor het gemak de  $x, y, z, +$  en  $=$  weggehaald. We hielden alleen een diagram met getallen over:

**Voorbeeld:**

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

We bekijken nu apart de eerste twee kolommen van de tabel en de laatste kolom:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

We noemen het eerste blok getallen een (coëfficiënt)matrix en de laatste kolom een (uitkomst)vector. Heel algemeen geldt dat bij een stelsel van  $m$  lineaire vergelijkingen in  $n$  onbekenden een  $m \times n$  matrix (spreek uit:  $m$  bij  $n$  matrix) hoort. Deze matrix heeft  $m$  rijen en  $n$  kolommen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Een stelsel lineaire vergelijkingen schrijven we vaak in matrix-vector vorm, d.w.z. in de vorm  $A\underline{x} = \underline{b}$ , waarbij  $A$  de coëfficiëntmatrix is,  $\underline{b}$  de resultaatvector is, en  $\underline{x}$  de vector is met de variabelen.

**Voorbeeld:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 8x + 12y = 17 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix} \leftrightarrow A\underline{x} = \underline{b}.$$

De uitdrukking  $A\underline{x}$  kunnen we opvatten als een vermenigvuldiging van de matrix  $A$  met de vector  $\underline{x}$ . De eerste variabele uit de vector  $\underline{x}$ , in dit geval de  $x$ , hoort bij de eerste kolom van de matrix  $A$ . De tweede variabele, de  $y$ , hoort bij de tweede kolom. De vermenigvuldiging gaat dan als volgt:

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 3 \cdot y \\ 8 \cdot x + 12 \cdot y \\ 4 \cdot x + 6 \cdot y \end{pmatrix}.$$

Merk op dat een matrix-vectorvermenigvuldiging alleen maar mogelijk is als het aantal variabelen in de vector  $\underline{x}$  gelijk is aan het aantal kolommen van de matrix  $A$ .

## 2.2 Rekenen met matrices.

Optellen en aftrekken van matrices gaat zoals je denkt dat het moet, elementsgewijs:

$$\text{als } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 0 \\ \frac{3}{4} & \pi \end{pmatrix}, \text{ dan is } A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 12 \\ 4\frac{3}{4} & 6+\pi \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldigen van een matrix met een getal doe je door elk element van de matrix met dat getal te vermenigvuldigen:

$$\text{als } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \text{ dan is } 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 24 & 36 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldigen van twee matrices, dus  $A \cdot B$ , gaat wat ingewikkelder. In feite werkt dat hetzelfde als het vermenigvuldigen van een matrix met een vector, maar dan herhaald toegepast op iedere kolom van de tweede matrix, hier dus  $B$ .

### Voorbeeld:

$$\text{Stel } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Wat is dan } AB?$$

Zoals gezegd: de eerste kolom van het produkt van de matrices  $A$  en  $B$  is  $A$  maal de eerste kolom van  $B$ . De tweede kolom van  $AB$  is  $A$  maal de tweede kolom van  $B$  enz.

$$\text{Dus de eerste kolom van } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ is}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix},$$

en de tweede kolom is

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 + 3 \cdot 1 \\ 8 \cdot -1 + 12 \cdot 1 \\ 4 \cdot -1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Het matrixproduct  $AB$  is dus  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 20 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ .

Nog een paar voorbeelden:

**Voorbeelden:**

1. Als  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , dan is

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}, \text{ en}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 11 & 4 & 9 \\ 12 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat  $A \cdot B \neq B \cdot A$ !

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & \pi \\ 3 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .

$A \cdot B$  bestaat in dit geval niet! Immers, de eerste kolom van  $B$  bestaat uit drie getallen, terwijl  $A$  maar twee kolommen heeft. Ga zelf na dat ook  $BA$  niet bestaat.

Als we in  $\mathbb{R}$  een getal met 1 vermenigvuldigen, dan blijft dat getal onveranderd:  $1 \cdot x = x$ . Ook bij matrices bestaat iets dergelijks. Bekijk de zogenaamde  $n \times n$  *eenheidsmatrix*, notatie:  $I_n$ :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ga na dat voor een vierkante  $n \times n$  matrix  $A$  geldt:  $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$ .

Laat  $A$  een  $n \times n$  matrix zijn. Als er een  $n \times n$  matrix  $B$  bestaat waarvoor geldt  $AB = BA = I_n$ , dan heet  $B$  de *inverse van  $A$* . Notatie:  $A^{-1}$ . Let op: niet alle vierkante matrices hebben een inverse. Als dit wel het geval is, dan geldt er dus:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ .

Hoe reken je nu de inverse van een matrix uit?

Neem bijvoorbeeld  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ , en laat  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$  de inverse zijn.

Dan moet  $A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , dus  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Los dit op:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 12 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

De eerste kolom van de inverse is dus  $\begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

De tweede kolom krijg je uit  $A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

de derde uit  $A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Je herhaalt dus steeds hetzelfde veegproces, met alleen een verschillende rechterkant. Het kan dus ook in één keer:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nu staat rechts de inverse.

Controleer steeds je antwoord (door rekenfouten is het bijna altijd eerst verkeerd!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Klopt!

### 2.3 Oplossen van stelsels vergelijkingen.

Stel je wilt oplossen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

een stelsel van de vorm  $A\underline{x} = \underline{b}$ .

Je kunt nu twee wegen bewandelen:

1. vegen
2. de inverse van  $A$  uitrekenen en daarna  $A^{-1}\underline{b} = \underline{x}$ .

Natuurlijk is 1 minder werk, je doorloopt bij 2 immers toch het veegeproces. Het uitrekenen van de inverse van  $A$  is alleen aan te bevelen als je  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  op moet lossen voor meerdere (=heel veel) vectoren  $\underline{b}$ .

Merk op dat als een matrix  $A$  een inverse heeft, dan is voor elke vector  $\underline{b}$  het stelsel vergelijkingen  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  uniek oplosbaar, dat wil zeggen er is precies één vector  $\underline{x}$  die er aan voldoet, te weten  $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ .

Als  $A$  nu geen inverse heeft, dan zijn er twee mogelijkheden: òf  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  heeft geen oplossing, òf oneindig veel.

**Voorbeelden:**

1.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  heeft geen oplossing (ga na );

2.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  geldt voor alle  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  met

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Hoe vind je nu alle oplossingen van  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ?

**STELLING 2.3.1** *Laat  $x_1$  een oplossing zijn van  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  en laat  $x_2$  een oplossing zijn van  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  =  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dan is  $x_1 + x_2$  een oplossing van  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ , en alle oplossingen krijg je door  $x_2$  over alle oplossingen van  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  te laten lopen.*

**Voorbeeld:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Je ziet zó dat  $x = 2, y = 0$  een oplossing is. Los nu op

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dus}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zodat  $x = y$  alle oplossingen geeft.

$$\text{Dus: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

zijn alle oplossingen van  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ .

Alle oplossingen van  $A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  zijn dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(Dit kan natuurlijk ook door direkt vegen!)

## 2.4 Transponeren.

$$\text{Voor een matrix } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

is de *getransponeerde* van  $A$  (notatie:  $A^T$ ) de gespiegelde in de hoofddiagonal,

$$\text{dus } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Bijvoorbeeld } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Voor een matrix met complexe getallen is de volgende matrix belangrijker. Laat  $A$  een matrix zijn met complexe getallen, dan is  $A^* = \bar{A}^T$ , de complex toegevoegde van de getransponeerde matrix. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2+4i \\ 2-3i & i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2+3i \\ 2-4i & -i \end{pmatrix}$$

Een matrix heet *symmetrisch* als  $A = A^T$ , en *zelfgeadjungeerd* of *Hermitisch* als  $A = A^*$ .

### 3 Determinanten

#### 3.1 Invoeren van het begrip determinant.

Bekijk nog een keer het stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden  $x$  en  $y$ :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \times a_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \times a_1 \end{cases}$$

Dit levert op:

$$\begin{cases} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases}$$

De tweede vergelijking van de eerste aftrekken geeft:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2.$$

Mits  $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$  is  $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$ .

Evenzo:

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \end{cases}$$

Weer de tweede vergelijking van de eerste aftrekken geeft:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Mits  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  is  $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ .

Merk op dat de noemer (bijna) dezelfde is.

Voer in als notatie:  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ . Dit is een (2 bij 2) *determinant*.

Dan staat er dus:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

We definiëren nu eerst een  $3 \times 3$  determinant:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ga na dat de definitie inderdaad drie keer hetzelfde oplevert!

Hierbij heet  $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  de *minor van*  $a_1$ ,  $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  de *minor van*  $a_2$ , enz.

Je kunt de determinant *ontwikkelen* naar elke kolom, de determinant is de som van: de elementen maal de minoren maal een teken. Welk teken bepaal je met onderstaand schema; regeltje van alternerende tekens:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Je kunt ook ontwikkelen naar een rij:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Voorbeeld:**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 9 - 4 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 9 - 1 \cdot 3) + 1 \cdot (1 \cdot 4 - 1 \cdot 2) \\ &= 6 - 6 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Hier was er naar de eerste rij ontwikkeld.

Ontwikkelen we bijvoorbeeld naar de derde kolom, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (4 - 2) - 3 \cdot (4 - 1) + 9 \cdot (2 - 1) = 2 - 9 + 9 = 2. \end{aligned}$$

We voeren nu eerst voor een algemene determinant het begrip *minor* wat preciezer in.

Bekijk de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De minor van  $a_{ij}$  is de determinant die je krijgt door rij  $i$  en kolom  $j$  weg te laten.

We definiëren nu de algemene  $n \times n$  determinant in termen van  $(n-1) \times (n-1)$  determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot (\text{de minor van } a_{11}) - a_{12} \cdot (\text{de minor van } a_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \cdot (\text{de minor van } a_{1n})$$

Ook kun je weer ontwikkelen naar elke gewenste rij of kolom, het tekenschema is

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

We komen straks terug op het oplossen van stelsels vergelijkingen met determinanten. Eerst wat rekenregels en eigenschappen.

### 3.2 Eigenschappen van determinanten

- a. Bij spiegelen in de hoofddiagonaal behoudt de determinant dezelfde waarde. Anders gezegd, voor een matrix  $A$  geldt  $\det A = \det A^T$ .

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ heeft dezelfde uitkomst als } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ontwikkel namelijk de eerste determinant naar de eerste rij en de tweede naar de eerste kolom. Gevolg is: elke bewering over rijen is ook waar voor kolommen en vice versa.

- b. Bij verwisselen van twee rijen verandert het teken van de determinant.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ontwikkel maar de eerste determinant naar de eerste rij en de tweede determinant naar de tweede rij.

- c. Als twee rijen gelijk zijn, is de determinant nul (volgt uit b).  
d. Als je een rij vermenigvuldigt met een getal, dan vermenigvuldig je de determinant met dat getal.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= ka_1 \cdot \alpha_1 - ka_2 \cdot \alpha_2 + ka_3 \cdot \alpha_3 \\ &= k(a_1 \cdot \alpha_1 - a_2 \cdot \alpha_2 + a_3 \cdot \alpha_3) \\ &= k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(hier is  $\alpha_i$  de minor van  $a_i$  voor  $i=1,2,3$ )

- e. Als twee rijen evenredig zijn, dan is de determinant nul (volgt direkt uit c en d).  
f. Als een rij de som is van twee termen, dan is de determinant de som van de twee afzonderlijke determinanten.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= (a_1 + x_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2 + x_2) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \\ & (a_3 + x_3) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- g. Een determinant verandert niet als je een veelvoud van een rij optelt bij een andere rij (dit volgt uit e en f).

Deze laatste eigenschap kun je gebruiken om determinanten uit te rekenen: door het veegproces uit te voeren verandert een determinant niet. (NB: Je mag nu ook “met kolommen vegen”, dit in tegenstelling tot wat we gezien hebben bij het oplossen van stelsels vergelijkingen.)

**Voorbeeld:**

$$\text{Bereken } \begin{vmatrix} p & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & -4 \end{vmatrix}.$$

$p$  keer de tweede kolom van de eerste af levert

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-p & 1 & 1 \\ 2+7p & -7 & -4 \end{vmatrix}$$

ontwikkelen naar de eerste rij geeft dan

$$- \begin{vmatrix} -1-p & 1 \\ 2+7p & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4p + 2 + 7p = 3p - 2.$$

### 3.3 Nogmaals stelsels vergelijkingen.

Bekijk eerst eens het stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ofwel  $A\underline{x} = \underline{b}$ .

$$\text{Noem } D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dan is

$$(i) \quad x_1 \cdot D = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(ii) \quad x_2 \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(iii) \quad x_3 \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

als  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  een oplossing is van  $A\underline{x} = \underline{b}$ .

Dit staat bekend als de *regel van Cramer*.

**BEWIJS:** We laten alleen zien dat (i) waar is, (ii) en (iii) bewijs je analoog.

Dus: neem aan dat  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  een oplossing is. Dan is

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= x_1 \cdot D + x_2 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= x_1 \cdot D \end{aligned}$$

(een-na laatste stap wegens f, laatste stap wegens c)

□

**NB:** Hetzelfde bewijs werkt natuurlijk ook voor  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ , enz.  
We formuleren de regel van Cramer nu in zijn algemene vorm.

**STELLING 3.3.1 (Regel van Cramer)** Als  $\det A = D \neq 0$ , dan wordt de oplossing voor  $A\underline{x} = \underline{b}$ , waar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ gegeven door}$$

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

met  $j = 1, \dots, n$ .

Bewering: theoretisch is dit een fraaie stelling, je moet het alleen nooit zo uitrekenen. Al die determinanten zijn heel veel rekenwerk, en vegen gaat sneller.

We geven nu nog enkele handige resultaten, zonder die te bewijzen.

**STELLING 3.3.2** Een  $n \times n$  matrix  $A$  heeft een inverse als en alleen als  $\det A \neq 0$ . Die inverse kun je ook met behulp van determinanten uitrekenen, maar vegen gaat weer veel sneller.

**STELLING 3.3.3** Als  $\det A = 0$ , dan heeft  $A\underline{x} = \underline{0}$  een oplossing  $\underline{x} \neq \underline{0}$ , en ook alleen dan.

De verzameling van al die vectoren noteer je met  $\ker A$ .

**STELLING 3.3.4**  $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$ .

**Voorbeeld:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Dan is } \det A = 2 \text{ en } \det B = 9, \text{ en inderdaad}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \text{ zodat } \det AB = 18 = 2 \cdot 9$$

## 4 Eigenwaarden en eigenvectoren

### 4.1 Invoeren van de begrippen eigenwaarde en eigenvector

**DEFINITIE 4.1.1** Een complex (of reëel) getal  $\lambda$  heet een eigenwaarde van de  $n \times n$  matrix  $A$  als er een vector  $\underline{x} \neq \underline{0}$  is met  $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ . Dan heet  $\underline{x}$  een eigenvector van  $A$  (bij eigenwaarde  $\lambda$ ).

**Voorbeelden:**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = 2$ , dan is

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = 0$ , dan is

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Interpretatie:  $A$  als afbeelding heeft in de richting van  $\underline{x}$  een simpele vorm, namelijk oprekking met een factor  $\lambda$ .

Opmerking: als  $\underline{x}$  een eigenvector is, dan is ook elk veelvoud van  $\underline{x}$  een eigenvector bij dezelfde eigenwaarde, behalve de vector  $\underline{0}$ . Om niet elke keer de uitzondering van  $\underline{0}$  mee te slepen, spreken we af dat we in de collectie van eigenvectoren bij een bepaalde eigenwaarde  $\underline{0}$  wel meenemen.

**Voorbeeld:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. A \text{ heeft drie eigenwaarden, te weten } 1, 2 \text{ en } 3.$$

De eigenvectoren bij 1 zijn alle vectoren van de vorm  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$   
(of  $\alpha \in \mathbb{C}$ , al naar gelang we  $A$  als reële of complexe matrix zien).

De eigenvectoren bij 2 zijn alle vectoren van de vorm  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

De eigenvectoren bij 3 zijn alle vectoren van de vorm  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 4.2 Hoe we eigenwaarden en eigenvectoren vinden

Merk op, als  $\underline{x}$  een eigenvector is, dan geldt  $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ , ofwel dan is

$$\left( A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \underline{x} = \underline{0}$$

dus  $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ . Volgens een stelling uit het vorige hoofdstuk is dan  $\det(A - \lambda I) = 0$ , omdat  $\underline{x} \neq \underline{0}$ .

Omgekeerd, als  $\det(A - \lambda I) = 0$ , dan is er ook een  $\underline{x} \neq \underline{0}$  zó dat  $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ .

**Voorbeeld:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Dan is}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (1 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

De eigenwaarden zijn dan dus  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -1$  en  $\lambda = 3$ .

– Eigenvectoren bij  $\lambda = 1$  krijg je door op te lossen:

$$(A - 1 \cdot I)\underline{x} = \underline{0}, \text{ dus } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oplossingen zijn de vectoren van de vorm  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

– Eigenvectoren bij  $-1$ : los op  $(A - (-1) \cdot I)\underline{x} = \underline{0}$ , dus

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

waarvan de oplossingen zijn  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

– Eigenvectoren bij 3: los op  $(A - 3 \cdot I)x = \underline{0}$ , dus

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

waarvan de oplossingen zijn  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

De vergelijking  $\det(A - \lambda I) = 0$  heet de *karakteristieke vergelijking* van  $A$ . Hieronder een voorbeeld met complexe oplossingen:

**Voorbeeld:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ geeft}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \text{ met } \lambda = \pm i \text{ als eigenwaarden.}$$

– Eigenvectoren bij  $i$ :

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

met oplossingen  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ , met nu  $\alpha \in \mathbb{C}$ !

– Eigenvectoren bij  $-i$ :

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

met oplossingen  $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

In al onze voorbeelden hierboven hadden we een  $n \times n$  matrix met  $n$  verschillende eigenwaarden. Dat hoeft natuurlijk niet altijd zo te zijn.

**Voorbeelden:**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  heeft één eigenwaarde: 1, en elke vector is eigenvector.
2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  heeft één eigenwaarde: 0, en alleen  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , zijn eigenvectoren.

Laat nu  $A$  een  $n \times n$  matrix zijn met  $n$  verschillende eigenwaarden:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Kies eigenvectoren  $\underline{x}_i$  met  $A\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Vorm de matrix  $S$  die je krijgt door  $\underline{x}_i$  op de  $i$ -de kolom te zetten:

$$S = (\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_n).$$

Dan :

$$A \cdot S = (A\underline{x}_1 \quad A\underline{x}_2 \quad \dots \quad A\underline{x}_n) = (\lambda_1 \underline{x}_1 \quad \lambda_2 \underline{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \underline{x}_n) = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bovendien is  $S$  inverteerbaar (dat bewijzen we niet).

Een matrix die alleen maar niet-nul getallen op z'n hoofddiagonaal heeft noemen we een diagonaalmatrix.

**Voorbeeld:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eigenwaarden: } \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2).$$

Dus 2 en 5 zijn eigenwaarden. Eigenvectoren:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  is eigenvector bij 5,  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  is eigenvector bij 2.

$$\text{Vorm } S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dan geldt: } AS = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dus: } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**NB:**  $S$  is inverteerbaar, want  $\det S = -3$ .

We merken nog het volgende op:  $A$  en  $A^T$  hebben dezelfde eigenwaarden (maar niet dezelfde eigenvectoren natuurlijk). Verder, als een complex getal  $\lambda$  een eigenwaarde is van de (complexe) matrix  $A$ , dan is  $\bar{\lambda}$  een eigenwaarde van  $A^*$ .

## 5 Lineaire dv van orde 2 met constante coëfficiënten

### 5.1 Homogene vergelijkingen

We bekijken eerst homogene vergelijkingen van orde twee met constante coëfficiënten, d.w.z. dv's van de vorm

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

Probeer eerst eens of  $y(x) = e^{\lambda x}$  een oplossing kan zijn voor een of ander getal  $\lambda$ . Invullen geeft

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = (a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda x} = 0,$$

voor alle  $x$ . Dat kan alleen als

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Deze kwadratische vergelijking in  $\lambda$  heet de *karakteristieke vergelijking*. We weten dat deze vergelijking in het algemeen twee, eventueel complexe, oplossingen heeft. Deze oplossingen zullen we voor nu even noteren met  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ . Een gevolg van een algemene stelling is dat als  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  dan is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking gegeven door  $y(x) = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x}$ , met  $c_1, c_2$  willekeurige constanten.

#### Voorbeelden:

1.  $y'' - y = 0$ . Probeer  $y = e^{\lambda x}$ . De karakteristieke vergelijking wordt  $\lambda^2 - 1 = 0$ , dus  $\lambda = \pm 1$ . De algemene oplossing is dus  $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ , met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
2.  $y'' + 3y' + 2y = 0$ . De karakteristieke vergelijking is  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ , dus  $\lambda = -2$  of  $\lambda = -1$ . De algemene oplossing is dus  $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$ , met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
3.  $y'' + y = 0$ . De karakteristieke vergelijking is  $\lambda^2 + 1 = 0$ , dus  $\lambda = \pm i$ . Alle *complex*e oplossingen worden dan gegeven door

$$y(x) = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}, \text{ met } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Nu is  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  en  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ . Dus

$$y(x) = (c_1 + c_2) \cos x + i(c_1 - c_2) \sin x.$$

Neem nu  $c_1 + c_2 = a \in \mathbb{R}$  en  $i(c_1 - c_2) = b \in \mathbb{R}$ . Dat kan, bijvoorbeeld  $c_1 = \overline{c_2}$  werkt. Dan  $y(x) = a \cos x + b \sin x$  met  $a, b \in \mathbb{R}$  is de algemene *reële oplossing*.

4.  $y'' + 2y' + y = 0$ . De karakteristieke vergelijking is  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ , dat geeft  $\lambda = -1$ . Er is nu maar één oplossing van de vorm  $y(x) = e^{\lambda x}$ , namelijk  $y = ce^{-x}$ .

Nu vinden we de andere oplossingen door variatie van constanten. Stel  $y(x) = c(x)e^{-x}$  is een oplossing. Dan

$$\begin{aligned} y' &= c'e^{-x} - ce^{-x} \\ y'' &= (c''e^{-x} - c'e^{-x}) - (c'e^{-x} - ce^{-x}) = c''e^{-x} - 2c'e^{-x} + ce^{-x}. \end{aligned}$$

Dus

$$y'' + 2y' + y = (c'' - 2c' + c + 2c' - 2c + c)e^{-x} = c''e^{-x} = 0,$$

zodat  $c'' = 0$ . Dat betekent  $c(x) = ax + b$ , met  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dus

$$y(x) = axe^{-x} + be^{-x} \quad \text{met } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dat is altijd zo: als er maar één oplossing van de karakteristieke vergelijking is, zeg  $\lambda_1$ , dan is naast  $e^{\lambda_1 x}$  ook  $xe^{\lambda_1 x}$  een oplossing.

## 5.2 Inhomogene vergelijking

We bekijken nu vergelijkingen van de vorm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Eerst doen we een algemene bewering: als  $y_0(x)$  één oplossing van de inhomogene vergelijking is en  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  de algemene oplossing van de homogene vergelijking

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

dan is de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking gegeven door

$$y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dat is leuk, omdat we nu maar één oplossing van de inhomogene vergelijking hoeven te vinden, maar hoe doe je dat dan? Voordat we daar wat over zeggen merken we op dat die ene oplossing van de inhomogene vergelijking een particuliere oplossing heet. Hoe vind je zo'n particuliere oplossing?

- Er is een algemene methode (ook nu weer variatie van constanten geheten), maar die is ingewikkeld.
- Voor veel functies  $f$  werkt het volgende idee: probeer voor  $y_0$  lineaire combinaties van  $f, f', f'', \dots$

We illustreren dit met wat voorbeelden

**Voorbeelden:**

1. Los op  $y'' - y = x$ . Probeer als particuliere oplossing  $y = ax + b$ . Invullen geeft (omdat  $y'' = 0$ )  $y'' - y = -ax - b = x$ , dus  $b = 0$ ,  $a = -1$ .

De algemene oplossing is dus  $y(x) = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ .

2.  $y'' + y' = \cos x$ . Probeer voor  $y$  een functie van de vorm  $y = a \cos x + b \sin x$ . Dan is  $y'' = -a \cos x - b \sin x$ , en  $y' = -a \sin x + b \cos x$ . Dus

$$y'' + y' = (-a + b) \cos x - (a + b) \sin x = \cos x,$$

wat geeft  $a + b = 0$ ,  $-a + b = 1$ . Oplossen van dit stelsel geeft  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ . Dus is  $-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$  een oplossing. De oplossing van de homogene vergelijking krijg je zoals gewoonlijk door de karakteristieke vergelijking op te lossen:  $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$  geeft  $\lambda = 0$  of  $\lambda = -1$ . De algemene oplossing is dus

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + c_1 e^{-x} + c_2 \quad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3.  $y'' - y = e^x$ . Nu werkt  $ae^x$  natuurlijk niet als particuliere oplossing omdat dit al een oplossing van de homogene vergelijking is. Probeer in zulke gevallen echter  $axe^x = y(x)$ . Dan

$$y' = axe^x + ae^x, \quad y'' = axe^x + 2ae^x,$$

dus  $y'' - y = 2ae^x = e^x$ , geeft  $a = \frac{1}{2}$ .

Een particuliere oplossing is dus  $y(x) = \frac{1}{2}xe^x$ , zodat de algemene oplossing wordt

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad \text{met } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Laten we het recept voor het oplossen van een inhomogene lineaire dv samenvatten

1. Los de bijbehorende homogene dv op.
2. Vind een particuliere oplossing bijvoorbeeld met de methode zoals boven beschreven.
3. Los de constanten in de algemene oplossing op d.m.v. rand- of beginvoorwaarden (indien die aanwezig zijn).

Van dat laatste geven we nog een voorbeeld:

Los op  $y'' + y' = \cos x$  met  $y(0) = 0$  en  $y'(0) = 0$ . We weten al dat de algemene oplossing is  $y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + c_1 e^{-x} + c_2$ . Invullen van  $y(0) = 0$  en  $y'(0) = 0$  geeft  $0 = -\frac{1}{2} + c_1 + c_2$  en  $0 = \frac{1}{2} - c_1$ . Dus  $c_1 = \frac{1}{2}$  en  $c_2 = 0$ . De gezochte oplossing is dus

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

We merken tenslotte op dat de technieken die hier gebruikt zijn ook werken voor de algemenere situatie van een  $n$ -de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

## 6 Stelsels differentiaalvergelijkingen

### 6.1 Stelsels homogene differentiaalvergelijkingen.

We bekijken in deze paragraaf stelsels homogene differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A \text{ een } n \times n \text{ matrix} \quad (*)$$

**Voorbeelden:**

1. 
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2y(t) \end{cases}, \text{ dus hier is } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dit stelsel is simpel op te lossen. Uit de tweede vergelijking volgt  $y(t) = c \cdot e^{-2t}$ . Dit invullen in  $x'(t) = 2x(t) + y(t)$  geeft  $x'(t) = 2x(t) + ce^{-2t}$ , een inhomogene differentiaalvergelijking. Die los je eenvoudig op:  $x(t) = c_1 e^{2t} - \frac{1}{4} c e^{-2t}$ .

2. Hoe nu te handelen met bijvoorbeeld

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 2y(t) \end{cases}.$$

**STELLING 6.1.1** *Als  $\lambda$  een eigenwaarde is van  $A$  en  $\underline{x}$  de bijbehorende eigenvector is, dan is  $\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{x}$  een oplossing van (\*).*

**BEWIJS:**  $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ , dus  $Ae^{\lambda t}\underline{x} = \lambda e^{\lambda t}\underline{x} = (e^{\lambda t}\underline{x})'$ . QED

In het tweede voorbeeld, waar  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ , volgt uit

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 \\ -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0$$

dat 3 en -4 de eigenwaarden zijn.

- Eigenvectoren bij 3: oplossen van  $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  geeft  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Eigenvectoren bij -4: oplossen van  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  geeft  $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

We zien dat voor elke  $c_1, c_2$  uit  $\mathbb{R}$ ,  $c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  en  $c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  oplossingen zijn.

Bewering: alle oplossingen zijn van de vorm

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

met andere woorden

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-4t} \\ y(t) = -3c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t} \end{cases}$$

met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Dat is altijd zo: als  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de eigenwaarden van  $A$  zijn met  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$  de bijbehorende eigenvectoren, dan krijg je alle oplossingen van  $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$  via  $\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{x}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \underline{x}_n$ , met  $c_1, \dots, c_n$  (eventueel) complexe getallen.

**Voorbeelden:**

$$3. \text{ Los op } \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = \phantom{3x} + 2y + z \\ z' = \phantom{3x} + \phantom{2y} + z \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Eigenwaarden zijn } 3, 2 \text{ en } 1.$$

Bijbehorende eigenvectoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oplossingen zijn dus

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^t \\ y(t) = \phantom{c_1 e^{3t}} - c_2 e^{2t} - 2c_3 e^t \\ z(t) = \phantom{c_1 e^{3t}} + \phantom{c_2 e^{2t}} + 2c_3 e^t \end{cases} \text{ met } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

4. Los op

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ Eigenwaarden: } (1 - \lambda)^2 + 4 = 0 \text{ geeft } \lambda = 1 \pm 2i.$$

- Eigenvectoren bij  $1+2i$ :  $\begin{pmatrix} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{pmatrix}$  oplossen geeft  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  als eigenvector.
- Eigenvectoren bij  $1-2i$ :  $\begin{pmatrix} 2i & -2 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \end{pmatrix}$  oplossen geeft  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  als eigenvector.

Dus:

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2)e^t \cos 2t + i(c_1 - c_2)e^t \sin 2t \\ y(t) = -i(c_1 - c_2)e^t \cos 2t + (c_1 + c_2)e^t \sin 2t \end{cases}$$

met  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

Nu hebben we een probleem: we willen de reële oplossingen hebben. Bedenk dat  $e^{(1+2i)t} = e^t \cdot e^{2it} = e^t \cos 2t + ie^t \sin 2t$ .

Door nu  $c_1$  en  $c_2$  zo te kiezen dat  $a = c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$  en  $b = i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$  krijgen we alle reële oplossingen.

Dus: alle reële oplossingen zijn  $\begin{cases} x(t) = ae^t \cos 2t + be^t \sin 2t \\ y(t) = -be^t \cos 2t + ae^t \sin 2t \end{cases}$  met  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## 6.2 Stelsels inhomogene differentiaalvergelijkingen

Ook voor stelsels inhomogene differentiaalvergelijkingen werkt het gebruikelijke “proberen” van een oplossing voor bepaalde soorten rechterlid.

**Voorbeeld:**

$$\begin{cases} x' = -y + t^3 \\ y' = x + t \end{cases}$$

Eerst het homogene stuk  $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$  ofwel  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Eigenwaarden zijn  $\pm i$ , alle oplossingen voor de homogene vergelijking zijn

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + b \sin t \\ y(t) = -b \cos t + a \sin t \end{cases} \text{ met } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nu moeten we nog één oplossing van de inhomogene vergelijking vinden. Probeer daartoe  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$  met  $a, b, c, d, e, f, g, h$  reële getallen. Dan is

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= 3t^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= t^3 \begin{pmatrix} -b+1 \\ a \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -f \\ e+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \\ g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergelijk coëfficiënten, je krijgt het volgende stelsel van acht vergelijkingen met acht onbekenden:

$$\begin{cases} a = 0 \\ 1 - b = 0 \\ -d = 3a \\ c = 3b \\ 2c = -f \\ e + 1 = d \\ e = -h \\ f = g \end{cases}$$

Dit stelsel is eenvoudig op te lossen, je krijgt  $a = d = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 3$ ,  $e = -1$ ,  $f = g = -6$ ,  $h = 1$ .

Samenvattend:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - t - 6 \\ t^3 - 6t + 1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + b \sin t + 3t^2 - t - 6 \\ y(t) = -b \cos t + a \sin t - t^3 - 6t + 1 \end{cases}.$$