Hoofdstuk 1

Vervolgcursus Maple

1.1 De New User's Tour herhaald

Achter een Windows-machine start je Maple via de All Programs-, Maple 12- en Classic Worksheet Maple 12-button (we gebruiken dus <u>niet</u> de gewone Maple 12 versie!). Het verdient ook dit jaar aanbeveling je worksheets tijdens het werk vaak te 'Save'n. Click nu op "Help" en vervolgens op "New User's Tour". Je hoeft natuurlijk niet nogmaals de al behandelde topics te doorlopen, maar als je niet meer weet hoe je één van onderstaande vraagstukken moet oplossen, dan kunnen ze nog van pas komen!

1.1.1 Herhalingsopgaven

1. Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2}$ voor $N = 10$ en $N = \infty$;
   Geef tevens een benadering van de uitkomsten in 20 decimalen.

2. Definieer de functies $f(x) = 5x - 1$ en $g(x) = \cos x$. Probeer vervolgens op te lossen: $f(x) = g(x)$. Als dit niet met Maple lukt, benader dan de oplossing zo goed mogelijk. Teken vervolgens in één figuur de grafieken van beide functies en zet bij het snijpunt een 'S'.

3. Teken in één figuur de halve bol met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal 1, die zich aan de bovenkant van het (x, y)-vlak bevindt en het deel van de kegel onder het (x, y)-vlak met vergelijking $z = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3$. Zorg dat de verhoudingen kloppen en geef het plaatje een passende titel!

4. Bepaal van de functie x^3e^{2x} de zesde afgeleide en vereenvoudig de output.

5. Bereken de integraal $\int x \arctan x \, dx$. Controleer het antwoord door dat weer te differentiëren (vereenvoudig desnoods om te kunnen vergelijken!).

1.1.2 Lineaire Algebra

Een nieuw onderdeel, dat nodig is voor de eindopdracht, is Lineaire Algebra. Neem Topic 9 van de New User's Tour door en test daarna je kennis door onderstaande opgaven te maken.

Opgaven bij Topic 9 ***Linear Algebra*:**

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bepaal de lengte van $\mathbf{b}$.
   b) Bepaal de LU-factorisatie van de matrix A.
   c) Geef een basis voor de nulruimte van A.
   d) Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Voer in de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Bepaal de determinant van B en geef een basis voor de kolomruimte.

3. Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (Deze opgave fungeert als oefening voor de eindopdracht.) Op de waddeneilanden wordt het weer elke dag geclassificeerd als zonnig, bewolkt of regenachtig. Het weer voor de volgende dag hangt alleen af van het weer van vandaag, maar niet van de dagen daarvoor. Als het vandaag zonnig is, dan is het morgen zonnig, bewolkt of regenachtig met de respectievelijke kansen 0.70, 0.10 en 0.20. Voor een bewolkte dag zijn de respectievelijke kansen voor de volgende dag gelijk aan 0.50, 0.25 en 0.25, terwijl voor een regenachtige dag de respectievelijke kansen voor de volgende dag 0.40, 0.30 en 0.30 zijn.
   We definiëren een Markov keten $\{X_n\}$ met drie toestanden 1, 2 en 3. Het proces is op dag n in toestand 1 bij een zonnige dag, in toestand 2 bij een bewolkte dag en in toestand 3 bij een regenachtige dag.

   - Stel de matrix P op van 1-staps overgangskansen [dit is dus de matrix in het stelsel vergelijkingen $\mathbf{y}_{k+1} = P\mathbf{y}_k$, waarbij $\mathbf{y_k}$ de vector is uit $\mathbb{R}^3$ die de kansen aangeeft op zonnig, bewolkt resp. regenachtig].
   - Wat is de kans dat het overmorgen zonnig is, als het vandaag regenachtig is? En hoe zit dat over drie dagen?
   - Bepaal de kansverdeling van het weer over een groot aantal dagen [kortom, bepaal de limiet van de vector $\mathbf{y}_k$ voor $k \to \infty$].

[Doe nu een toets over de herhalingsopgaven en Topic 9.]

Hoofdstuk 2

Programmeren in Maple

Je hebt inmiddels een hoop ervaring opgedaan met programmeren. Om nog even in herinnering te brengen hoe je in Maple kon programmeren, staan hieronder nog wat vraagstukken of jezelf te testen. Je kunt eventueel Topic 11 van de New User's Tour doornemen als je ergens vast loopt.

Vragstukken:

1 **Priemgetallen:** Laat alle priemgetallen tussen de 100 en 200 afdrukken en laat Maple uitrekenen hoeveel dat er zijn (druk dat ook af!).

2 **Newton-Raphson:** Met het algoritme van Newton-Raphson is het (meestal) mogelijk een nulpunt van een differentieerbare functie f te bepalen. Het is een iteratieve methode, die als volgt is gedefinieerd:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \text{ gegeven.} \end{cases}$$

Als we het nulpunt van $f(x) = x^2 - 2$ hiermee berekenen, vinden we in feite een benadering van $\sqrt{2}$. Voer dit uit en gebruik als stopcriterium dat twee opeenvolgende iteraties minder dan 10^{-9} van elkaar verschillen.

3 **Een gokspel:** Anna en Bob doen een gokspelletje met een zuivere dobbelsteen. Om de beurt gooien ze de dobbelsteen. Anna mag hierbij steeds beginnen. Degene die als eerste een 6 gooit wint het spel. Daarna beginnen ze met een volgend spel. In totaal spelen ze dit spel N keer.
Je moet dit spelletje simuleren in Maple. Voor het gooien van de dobbelsteen kun je in Maple gebruik maken van het commando `rand(1..6)`, dat willekeurig een 1, 2, 3, 4, 5 of 6 als uitkomst geeft. Definieer dit commando al voor je aan de procedure begint. Schrijf vervolgens een procedure `gokspel:=proc(N)`, waarmee je het spel nabootst. Hierin staat N voor het aantal keren dat het spel wordt gespeeld door Anna en Bob. Houd tevens bij hoe lang het spel iedere keer duurt (hoeveel worpen er nodig zijn) en wie er wint. Bepaal ook de verhouding van het aantal keren dat Anna wint t.o.v. het totaal aantal spelletjes. Waar gaat die verhouding heen in de limiet? En wat is de gemiddelde duur van één spel?

4 **Numerieke Integratie:** Met de Trapeziumregel kun je een benadering van een integraal op een gesloten interval geven. Verdeel daartoe het interval in n gelijke stukken en bereken de waarde van de functie aan het begin $f(x_i)$ en eind $f(x_{i+1})$ van ieder interval i. Trek vervolgens een rechte lijn tussen $f(x_i)$ en $f(x_{i+1})$. Met de figuur die je krijgt, een trapezium, vind je op ieder interval een benadering van de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as. Als je de oppervlaktes van al deze trapezia bijelkaar telt, vind je een benadering van de integraal. Maak nu een procedure `trapezium(f,a,b,n)`, die met behulp van de Trapeziummethode de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ benadert.