Vraagstukken bij het eerste deel van de cursus

Mathematische Methoden voor F

februari en maart 2010

Hoofdstuk 1

Vraagstuk 1.1:
Los op:

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 9 \\ 2x + y + 5z = 3 \\ -x - 3y + 6z = -15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y - 2z = -1 \\ 2x + y + 4z = 1 \\ 4x + y + 7z = 2 \end{cases}$

Vraagstuk 1.2:
We bekijken het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

a) Teken de drie vergelijkingen (drie lijnen) in het (x, y)-vlak.

b) Verklaar waarom het stelsel geen oplossingen heeft.

Vraagstuk 1.3:

a) Toon aan dat het stelsel

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= a \end{aligned}$$

geen oplossingen heeft als $a = 0$.

b) Bepaal de waarde van a waarvoor het stelsel minstens één oplossing heeft, en bereken voor die a alle oplossingen.

Vraagstuk 1.4:
Voor welke waarde van k heeft het stelsel

$$kx + y = 1$$

$$x + ky = 1$$

géén oplossing, precies één oplossing, of oneindig veel oplossingen?

Hoofdstuk 2

Vraagstuk 2.1:
Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Bereken $A + B, A - B, A + 3B$ en $4A - 5B$.

b) Los de matrix X op uit $X + A = B$.

c) Los de matrix Y op uit $2(2A + 3Y) = 5B$.

Vraagstuk 2.2:
Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bereken, indien ze gedefinieerd zijn, de matrixproducten AB, BA, AC, CA, BC en CB.

Vraagstuk 2.3:
Bereken de volgende matrix-vector producten, indien ze gedefinieerd zijn:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vraagstuk 2.4:

a) Bepaal alle matrices X die voldoen aan

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bepaal alle matrices Y die voldoen aan

$$Y \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraagstuk 2.5:
Bereken de inverse van de volgende matrices:

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraagstuk 2.6:
Gegeven is de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bereken $B + B^T, B - B^T, BB^T$ en $B^T B$.

b) Welke van de berekende matrices zijn symmetrisch?

Vraagstuk 2.7:
Onder welke voorwaarden voor b_1 en b_2 heeft de vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$ oplossingen, als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}?$$

Bepaal in dat geval alle oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$.

Vraagstuk 2.8:
Bepaal de algemene oplossing van:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Hoofdstuk 3

Vraagstuk 3.1:
Bepaal de determinant en de inverse van elk van de volgende matrices:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraagstuk 3.2:
Gegeven is het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 8 \\ -x + 2y - z &= -8 \\ -y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Zet dit stelsel om in de matrixnotatie en bepaal x, y en z.
[(Aanwijzing: gebruik Vraagstuk 3.1 c).]

Vraagstuk 3.3:
Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bereken de determinant en de inverse van AB.

b) Waarom geldt hier niet $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ en $\det AB = \det A \cdot \det B$?

c) Toon aan dat de matrix BA geen inverse heeft.

Vraagstuk 3.4:
Onderzoek voor welke waarden van x elk der volgende matrices inverteerbaar is.
(De inverse, indien deze bestaat, behoeft niet te worden bepaald.)

$$\text{a) } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & x+1 & 1 \\ -2 & 0 & x-4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2x \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Vraagstuk 3.5: Gebruik de regel van Cramer bij het oplossen van de volgende stelsels:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + z = -8 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

Hoofdstuk 4

Vraagstuk 4.1:
Gegeven is de matrix A en de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ door

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Laat zien dat $\underline{x}$ een eigenvector is van A.
Wat is de bijbehorende eigenvector?

b) Laat zien dat $\underline{y}$ een eigenvector is van A.
Wat is de bijbehorende eigenvector?

Vraagstuk 4.2:
Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van de volgende matrices:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vraagstuk 4.3:
Bepaal voor de volgende matrices een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix S zo dat $A_i = SDS^{-1}, i = 1, 2$:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hoofdstuk 5

Vraagstuk 5.1:
Bepaal de algemene oplossing van:

a) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$

b) $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0.$

c) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0.$

d) $4y''(x) + y(x) = 0.$

e) $y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 4x^2.$

f) $y''(x) - 4y(x) = 3e^x + 8 + \sin x.$

Vraagstuk 5.2:
Los de volgende beginwaardeproblemen op:

a) $\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = 0, \\ y(0) = 2, y'(0) = 1. \end{cases}$

Hoofdstuk 6

Vraagstuk 6.1:
Los de volgende stelsels differentiaalvergelijkingen op:

a) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), \\ y'(t) = -4x(t) + y(t). \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + z(t), \\ y'(t) = 3y(t) + z(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t). \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + e^t, \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - e^{-t}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) + \sin t, \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - 2\cos t. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + 3z(t) + 48t, \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) + 2e^t, \\ z'(t) = 3x(t) - 2z(t) - 2e^t. \end{cases}$