Tentamen Logica en Modelleren

27 oktober 2010

Uitwerkingen

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie af:

(a) $(\neg p \vee q) \to r,\ \neg(r \vee s) \ \vdash\ \neg q$

(b) $\neg(p \wedge \neg r),\ q \vee \neg r,\ p \to \neg q \ \vdash\ \neg p$

Uitwerking

(a)

1	$(\neg p \vee q) \to r$	premise
2	$\neg(r \vee s)$	premise
3	q	ass
4	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 3
5	r	$\to e$ 1, 4
6	$r \vee s$	$\vee i_1$ 5
7	$\bot$	$\neg e$ 2, 6
8	$\neg q$	$\neg i$ 3–7

(b)

1	$\neg(p \wedge \neg r)$	premise
2	$q \vee \neg r$	premise
3	$p \to \neg q$	premise
4	p	ass
5	$\neg q$	$\to e$ 3, 4
6	q	ass
7	$\perp$	$\neg e$ 5, 6
8	$\neg r$	$\perp e$ 7
9	$\neg r$	ass
10	$\neg r$	$\vee e$ 2, 6–8, 9–9
11	$p \wedge \neg r$	$\wedge i$ 4, 10
12	$\perp$	$\neg e$ 1, 11
13	$\neg p$	$\neg i$ 4–12

Opgave 2. Beschouw de formule ϕ: $\forall x(Rxy \to \neg\exists y Ryx)$

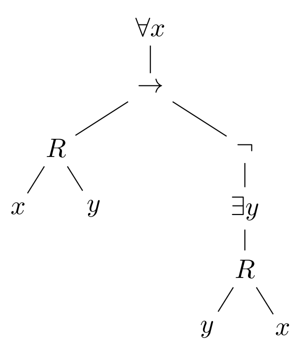
(a) Teken de parse tree van ϕ.

(b) Onderstreep in de formule ϕ alle vrije variabelen.

(b) Bekijk het model $\mathcal{M}$ met als domein $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en met $R^{\mathcal{M}} = <$.
Geef voor de vrije variabele(n) van ϕ een look-up functie ℓ zodat $\mathcal{M} \vDash_\ell \phi$.

Uitwerking

(a)



(b) $\forall x(Rx\underline{y} \to \neg\exists y Ryx)$

(c) $\ell(y) = 2$ [Alternatieve oplossing: $\ell(y) = 1$]

Opgave 3. Leidt met natuurlijke deductie af:

(a) $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px$

(b) $\forall x Px, \neg\exists x(Px \wedge Qx) \vdash \neg\exists x Qx$

UITWERKING

(a)

1		$\forall x(Px \wedge Qx)$	premise
2	x_0		
3		$Px_0 \wedge Qx_0$	$\forall e$ 1
4		Px_0	$\wedge e_1$ 3
5		$\forall x Px$	$\forall i$ 2–5

(b)

1		$\forall x Px$	premise
2		$\neg\exists x(Px \wedge Qx)$	premise
3		$\exists x Qx$	assumption
4	x_0	Qx_0	assumption
5		Px_0	$\forall e$ 1
6		$Px_0 \wedge Qx_0$	$\wedge i$ 4, 5
7		$\exists x(Px \wedge Qx)$	$\exists i$ 6
8		$\bot$	$\neg e$ 2, 7
9		$\bot$	$\exists e$ 3, 4–8
10		$\neg\exists x Qx$	$\neg i$ 3–9

Opgave 4. De volgende semantische implicatie is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \vDash \exists x\exists y((Px \leftrightarrow Qx) \wedge (Py \leftrightarrow Qy))$$

Uitwerking

Model $\mathcal{M}$ met domein $\{1,2,3\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{1,2,3\}$ en $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$

[NB: Er moeten tenminste 3 elementen zijn, en P en Q moeten voor elk element verschillende waarheidswaarden hebben.]

Opgave 5. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

Kxy:	x is een kind van y				
Wx:	x werkt				
Gxy:	x kent y				
Tx:	x is thuis				
a:	Anna	b:	Barbara	c:	Chris

(a) Als al haar kinderen thuis zijn, dan werkt Anna niet.

(b) Chris kent al Anna's kinderen.

(c) Chris kent al Anna's kinderen, behalve Barbara.

Uitwerking

(a) $\forall x\,(Kxa \to Tx) \to \neg Wa$

(b) $\forall x\,(Kxa \to Gcx)$

(c) $\forall x\,((Kxa \wedge x \neq b) \to Gcx)) \wedge \neg Gcb$

Opgave 6. In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id, Datum, Afzender, Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.
In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool B, zodat $B(x,y,z,w)$ uitdrukt:
"x is de identifier van een brief die op dag y door z aan w is verstuurd"
Anna wordt aangeduid met de constante a.

Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele x naar:

(a) de dagen x waarop Anna geen brief heeft verstuurd.

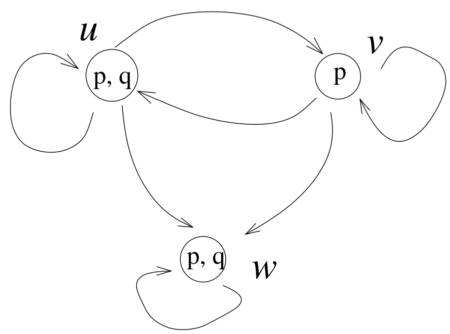
(b) de personen x die wel eens een brief aan Anna hebben gestuurd, maar aan niemand anders.

Uitwerking

(a) $\neg\exists y\exists z Byxaz$

(b) $\exists y\exists z Byzxa \wedge \neg\exists y\exists z\exists w(Byzxw \wedge w \neq a)$

Opgave 7. Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



(a) Ga na voor welke werelden x geldt:

(i) $\mathcal{M}, x \Vdash \Diamond(p \wedge q) \to (p \wedge q)$

(ii) $\mathcal{M}, x \Vdash \Box q \to \Box(p \wedge q)$

Motivering is niet vereist.

(b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\Vdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

(c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\Vdash \Diamond p \to \Box p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

Uitwerking

(a) (i) u, w

(ii) u, v, w

(b) Zo'n labeling is niet mogelijk omdat R transitief is.

(c) $L''(u) = \{p\}$ en $L''(v) = L''(w) = \emptyset$

Opgave 8. We willen een programma P dat, werkend op integers, als effect heeft dat de outputwaarden van de variabelen y en z respectievelijk groter en kleiner zijn dan de inputwaarde van x, en dat de waarde van x onveranderd laat.

Specificeer dit gedrag met behulp van een Hoare triple.

Uitwerking

$$(\!|x_0 = x|\!)\ P\ (\!|x_0 = x \wedge y > x \wedge z < x|\!)$$

Hier is x_0 een "logical variable", die dus in P niet mag worden gebruikt.

Opgave 9.

(a) Beredeneer met behulp van de correctheidsstelling van de predikatenlogica dat een verzameling formules Σ die *syntactisch inconsistent* is, d.w.z., waarvoor geldt dat $\Sigma \vdash \bot$, geen model $\mathcal{M}$ heeft met $\mathcal{M} \models \Sigma$.

(b) We hebben een éénplaatsige predikaatletter P en constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$, en definiëren daarmee de (oneindige) verzameling formules

$$\Sigma = \{\neg P(c_1),\ P(c_2) \to P(c_1),\ P(c_3) \to P(c_2),\ P(c_4) \to P(c_3),\ \ldots\}$$

Is de verzameling formules Σ syntactisch consistent? Motiveer je antwoord.

Uitwerking

(a) Neem aan dat $\Sigma \vdash \bot$.

Uit de correctheidstelling volgt dan dat ook $\Sigma \models \bot$.

Dat wil zeggen dat $\bot$ waar is in elk model $\mathcal{M}$ met $\mathcal{M} \models \Sigma$.

Maar $\bot$ is in geen elk model waar.

Er is dus geen model $\mathcal{M}$ met $\mathcal{M} \models \Sigma$ (omdat anders toch $\mathcal{M} \models \bot$).

(b) Kies model $\mathcal{M}$ met domein $\{1\}$, $c_i^{\mathcal{M}} = 1$ voor alle i, en $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
In $\mathcal{M}$ zijn alle formules waar, dus Σ is consistent.

[Alternatief: $\mathcal{M}'$ met domein $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $c_i^{\mathcal{M}'} = i$ voor alle i, en $P^{\mathcal{M}'} = \emptyset$.]

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.