# Tentamen Logica en Modelleren

27 oktober 2010

**Opgave 1.** *(6 + 6 punten)*

Leid met natuurlijke deductie af:

(a) $(\neg p \vee q) \to r,\ \neg(r \vee s) \ \vdash\ \neg q$

(b) $\neg(p \wedge \neg r),\ q \vee \neg r,\ p \to \neg q \ \vdash\ \neg p$

**Opgave 2.** *(4 + 4 + 4 punten)*

Beschouw de formule $\phi$: $\forall x(Rxy \to \neg\exists y Ryx)$

(a) Teken de parse tree van $\phi$.

(b) Onderstreep in de formule $\phi$ alle vrije variabelen.

(b) Bekijk het model $\mathcal{M}$ met als domein $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en met $R^{\mathcal{M}} = <$.
Geef voor de vrije variabele(n) van $\phi$ een look-up functie $\ell$ zodat $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \phi$.

**Opgave 3.** *(5 + 5 punten)*

Leidt met natuurlijke deductie af:

(a) $\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash\ \forall x Px$

(b) $\forall x Px, \neg\exists x(Px \wedge Qx) \ \vdash\ \neg\exists x Qx$

**Opgave 4.** *(8 punten)*

De volgende semantische implicatie is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \ \vDash\ \exists x\exists y((Px \leftrightarrow Qx) \wedge (Py \leftrightarrow Qy))$$

**Opgave 5.** *(4 + 4 + 4 punten)*

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Kxy: | x is een kind van y | | | | |
| Wx: | x werkt | | | | |
| Gxy: | x kent y | | | | |
| Tx: | x is thuis | | | | |
| a: | Anna | b: | Barbara | c: | Chris |

(a) Als al haar kinderen thuis zijn, dan werkt Anna niet.

(b) Chris kent al Anna's kinderen.

(c) Chris kent al Anna's kinderen, behalve Barbara.

**Opgave 6.** *(4 + 4 punten)*

In een database van de post bevindt zich een tabel *Brieven* met kolommen *Id, Datum, Afzender, Geadresseerde*, waarin alle verzonden brieven worden geadministreerd.
In het relatiemodel representeren we deze tabel door het predikaatsymbool $B$, zodat $B(x, y, z, w)$ uitdrukt:

"$x$ is de identifier van een brief die op dag $y$ door $z$ aan $w$ is verstuurd"

Anna wordt aangeduid met de constante $a$.

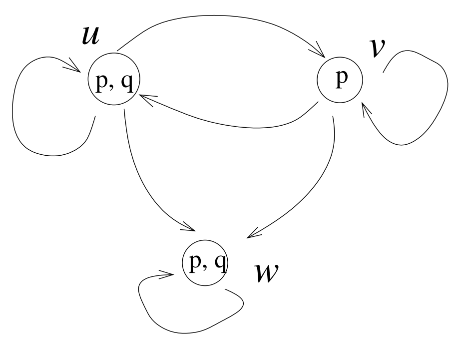
Geef queries in de vorm van formules met een vrije variabele $x$ naar:

(a) de dagen $x$ waarop Anna geen brief heeft verstuurd.

(b) de personen $x$ die wel eens een brief aan Anna hebben gestuurd, maar aan niemand anders.

**Opgave 7.** *(6 + 4 + 4 punten)*

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame
$\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



(a) Ga na voor welke werelden $x$ geldt:

(i) $\mathcal{M}, x \Vdash \Diamond(p \wedge q) \to (p \wedge q)$

(ii) $\mathcal{M}, x \Vdash \Box q \to \Box(p \wedge q)$

Motivering is niet vereist.

(b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie $L'$ op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \nVdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Als zo'n $L'$ niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

(c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie $L''$ op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \nVdash \Diamond p \to \Box p$. Als zo'n $L''$ niet bestaat geef dan kort aan waarom niet.

**Opgave 8.** *(6 punten)*

We willen een programma $P$ dat, werkend op integers, als effect heeft dat de outputwaarden van de variabelen $y$ en $z$ respectievelijk groter en kleiner zijn dan de inputwaarde van $x$, en dat de waarde van x onveranderd laat.

Specificeer dit gedrag met behulp van een Hoare triple.

[NB: Je hoeft het programmatje zelf niet te schrijven.]

**Opgave 9.** *(4 + 4 punten)*

(a) Beredeneer met behulp van de correctheidsstelling van de predikatenlogica dat een verzameling formules $\Sigma$ die *syntactisch inconsistent* is, d.w.z., waarvoor geldt dat $\Sigma \vdash \bot$, geen model $\mathcal{M}$ heeft met $\mathcal{M} \models \Sigma$.

(b) We hebben een éénplaatsige predikaatletter $P$ en constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$, en definiëren daarmee de (oneindige) verzameling formules

$$\Sigma = \{\neg P(c_1),\ P(c_2) \to P(c_1),\ P(c_3) \to P(c_2),\ P(c_4) \to P(c_3),\ \ldots\}$$

Is de verzameling formules $\Sigma$ syntactisch consistent? Motiveer je antwoord.

*Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.*