# Voortentamen Logica en Modelleren

*30 september 2011*

## Uitwerkingen

**Opgave 1.** Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \vee s)$

(b) $\neg p,\ p \vee q \vdash q$

Uitwerking

(a)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q$ | premise |
| 2 | $p \wedge r$ | ass |
| 3 | $p$ | $\wedge e_1$ 2 |
| 4 | $q$ | $\to e$ 1, 3 |
| 5 | $q \vee s$ | $\vee i_1$ 4 |
| 6 | $(p \wedge r) \to (q \vee s)$ | $\to i$ 2–5 |

(b)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg p$ | premisse |
| 2 | $p \vee q$ | premisse |
| 3 | $p$ | assumptie |
| 4 | $\perp$ | $\neg e$ 1, 3 |
| 5 | $q$ | $\perp e$ 4 |
| 6 | $q$ | assumptie |
| 7 | $q$ | $\vee e$ 2, 3–5, 6–6 |

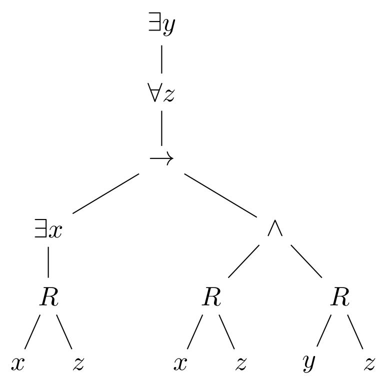
**Opgave 2.** Beschouw de formule $\exists y \forall z (\exists x Rxz \to (Rxz \wedge Ryz))$

(a) Teken de parse tree van deze formule.

(b) Onderstreep in de formule de vrije variabelen.

UITWERKING

(a)




(b) $\exists y \forall z (\exists x Rxz \to (R\underline{x}z \wedge Ryz))$

**Opgave 3.** Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $\forall x Ax, \exists x Bx \vdash \exists x(Ax \wedge Bx)$

(b) $\forall x(Ax \to \neg \exists y Rxy), Rcc \vdash \neg Ac$

UITWERKING

(a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\forall x Ax$ | premise |
| 2 | | $\exists x Bx$ | premise |
| 3 | $x_0$ | $Bx_0$ | assumption |
| 4 | | $Ax_0$ | $\forall e$ 1 |
| 5 | | $Ax_0 \wedge Bx_0$ | $\wedge i$ 3, 4 |
| 6 | | $\exists x(Ax \wedge Bx)$ | $\exists i$ 5 |
| 7 | | $\exists x(Ax \wedge Bx)$ | $\exists e$ 2, 3–6 |

(b)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x(Ax \to \neg\exists y Rxy)$ | premise |
| 2 | $Rcc$ | premise |
| 3 | $Ac$ | assumption |
| 4 | $Ac \to \neg\exists y Rcy$ | $\forall e$ 1 |
| 5 | $\neg\exists y Rcy$ | $\to e$ 3, 4 |
| 6 | $\exists y Rcy$ | $\exists i$ 2 |
| 7 | $\bot$ | $\neg e$ 5, 6 |
| 8 | $\neg Ac$ | $\neg i$ 3–7 |

**Opgave 4.** De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

(a) $\exists x Ax$, $\exists x Rxx$, $\forall x(Ax \to \neg Rxx) \models \forall x(Ax \vee Rxx)$

(b) $\forall x \exists y Rxy \models \exists x \exists y(Rxy \wedge Ryx)$

Uitwerking

(a) Model $\mathcal{M}$ met domein $\{1,2,3\}$, $A^{\mathcal{M}} = \{1\}$, $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 2,2\rangle\}$

(b) Model $\mathcal{M}'$ met domein $\{1,2,3\}$ en $R^{\mathcal{M}'} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

**Opgave 5.**

(a) Wanneer zeggen we dat een verzameling formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ in de predikatenlogica consistent is?

(b) Geef voor de volgende twee verzamelingen formules aan of ze consistent zijn. Geef in het geval van consistentie een model dat de formules waar maakt.

  (i) $\{\exists x Px,\ \exists x Qx,\ \forall x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$

  (ii) $\{\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \forall y(Rxy \to Ryx),\ \exists x \exists y Rxy,\ \exists x \neg Rxx\}$

Uitwerking

(a) De verzameling $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ is consistent als er een model $\mathcal{M}$ bestaat dat $\phi_1, \ldots, \phi_n$ alle waar maakt, d.w.z. zo dat $\mathcal{M} \models \phi_1, \ldots, \mathcal{M} \models \phi_n$.

(b) (i) Consistent.
Model $\mathcal{M}$ met domein $\{1,2\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$

  (ii) Consistent.
Model $\mathcal{M}'$ met domein $\{1,2\}$, $R^{\mathcal{M}'} = \{\langle 1,1\rangle\}$

**Opgave 6.** Gegeven is de formule $\phi$: $\forall x \forall y (Rxy \to \exists z Ryz)$
Geef voor de modellen $\mathcal{M}_i$ aan of $\mathcal{M}_i \vDash \phi$. Geef alleen een korte motivatie voor de gevallen waarin het *niet* waar is

(a) Het model $\mathcal{M}_1$ met domein $A_1 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_1} = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$.
(b) Het model $\mathcal{M}_2$ met domein $A_2 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_2} = \{(a, b), (b, b), (b, c)\}$.
(c) Het model $\mathcal{M}_3$ met domein $A_3 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_3} = \{(a, b), (b, b)\}$.

Uitwerking
De formule $\phi$ zegt (in pijlentaal): "*Vanuit elk punt dat een pijl onvangt, vertrekt ook weer een pijl.*"

(a) Waar.

(b) Niet waar. Punt $c$ wordt wel aangewezen, namelijk door $b$, maar wijst nergens naar.

(c) Waar.

**Opgave 7.** Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

| | |
|---|---|
| Bx: | x is een boek |
| Uxyz: | x heeft y aan z uitgeleend |
| Lxy: | x heeft y gelezen |
| a: | Anna |
| c: | Chris |

(a) Chris heeft alle boeken die hij heeft gelezen uitgeleend aan Anna.
(b) Chris heeft alle boeken die hij heeft gelezen uitgeleend.
(c) Anna heeft verschillende boeken gelezen.

Uitwerking

(a) $\forall x\, ((Bx \wedge Lcx) \to Ucxa)$

(b) $\forall x\, ((Bx \wedge Lcx) \to \exists y\, Ucxy)$

(c) $\exists x \exists y\, (x \neq y \wedge Bx \wedge By \wedge Lax \wedge Lay)$

**Opgave 8.**

(a) Geef een formule $\phi$ die uitdrukt dat een model minstens 2 elementen bevat.
(b) Nu een formule $\psi$ die uitdrukt dat een model hoogstens 2 elementen bevat.
(c) Geef een formule $\chi$ die uitdrukt dat een model precies 2 elementen bevat. [Hint: je kunt gebruikmaken van $\phi$ en $\psi$.]

Uitwerking

(a) $\phi$: $\exists x \exists y\ x \neq y$

(b) $\psi$: $\neg \exists x \exists y \exists z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

(c) $\chi$: $\phi \wedge \psi$

# Nog een paar alternatieve oplossingen

**Opgave 3(b)** kan ook met Modus Tollens:

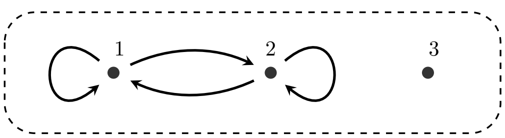
| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x(Ax \to \neg\exists y Rxy)$ | premise |
| 2 | $Rcc$ | premise |
| 3 | $Ac \to \neg\exists y Rcy$ | $\forall e$ 1 |
| 4 | $\exists y Rcy$ | $\exists i$ 2 |
| 5 | $\neg\neg\,\exists y Rcy$ | $\neg\neg i$ 4 |
| 6 | $\neg Ac$ | MT 3, 5 |

**Opgave 5(b)(ii)** kan ook met een pijl tussen twee *verschillende* elementen, maar dan heb je wel extra pijlen nodig om symmetrie en transitiviteit te behouden. En natuurlijk weer een extra punt dat niet naar zichzelf wijst.

Model $\mathcal{M}''$ met domein $\{1, 2, 3\}$ en $R^{\mathcal{M}''} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

Je kunt het model ook tekenen:

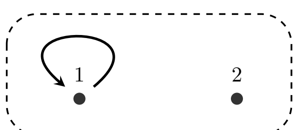
$\mathcal{M}''$




Ook nog een tekeningetje van de eerder gegeven, eenvoudigere oplossing:

Model $\mathcal{M}'$ met domein $\{1, 2\}$ en $R^{\mathcal{M}'} = \{\langle 1, 1\rangle\}$

$\mathcal{M}'$




**Opgave 8(b)** kan ook door te zeggen dat van elk drietal elementen er minstens twee gelijk zijn:

$$\psi : \ \forall x \forall y \forall z\, (x = y \lor x = z \lor y = z)$$

**Opgave 8(c)** kan ook direct:

$$\chi : \ \exists x \exists y\, (x \neq y \land \forall z\, (z = x \lor z = y))$$