Voortentamen Logica en Modelleren

30 september 2011

Opgave 1. *(7 + 7 punten)*
Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \vee s)$

(b) $\neg p, p \vee q \vdash q$

Opgave 2. *(3 + 3 punten)*
Beschouw de formule $\exists y \forall z (\exists x Rxz \to (Rxz \wedge Ryz))$

(a) Teken de parse tree van deze formule.

(b) Onderstreep in de formule de vrije variabelen.

Opgave 3. *(7 + 7 punten)*
Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $\forall x Ax, \exists x Bx \vdash \exists x (Ax \wedge Bx)$

(b) $\forall x (Ax \to \neg \exists y Rxy), Rcc \vdash \neg Ac$

Opgave 4. *(7 + 7 punten)*
De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

(a) $\exists x Ax, \exists x Rxx, \forall x (Ax \to \neg Rxx) \models \forall x (Ax \vee Rxx)$

(b) $\forall x \exists y Rxy \models \exists x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$

Opgave 5. *(2 + 4 + 4 punten)*

(a) Wanneer zeggen we dat een verzameling formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ in de predikatenlogica consistent is?

(b) Geef voor de volgende twee verzamelingen formules aan of ze consistent zijn. Geef in het geval van consistentie een model dat de formules waar maakt.

(i) $\{\exists x Px, \exists x Qx, \forall x (\neg Px \vee \neg Qx)\}$

(ii) $\{\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz), \forall x \forall y (Rxy \to Ryx), \exists x \exists y Rxy, \exists x \neg Rxx\}$

Opgave 6. *(3 + 3 + 3 punten)*

Gegeven is de formule ϕ: $\forall x \forall y (Rxy \to \exists z Ryz)$
Geef voor de modellen $\mathcal{M}_i$ aan of $\mathcal{M}_i \vDash \phi$. Geef alleen een korte motivatie voor de gevallen waarin het *niet* waar is

(a) Het model $\mathcal{M}_1$ met domein $A_1 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_1} = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$.

(b) Het model $\mathcal{M}_2$ met domein $A_2 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_2} = \{(a, b), (b, b), (b, c)\}$.

(c) Het model $\mathcal{M}_3$ met domein $A_3 = \{a, b, c\}$ en $R^{\mathcal{M}_3} = \{(a, b), (b, b)\}$.

Opgave 7. *(4 + 4 + 4 punten)* Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Bx:	x is een boek
Uxyz:	x heeft y aan z uitgeleend
Lxy:	x heeft y gelezen
a:	Anna
c:	Chris

(a) Chris heeft alle boeken die hij heeft gelezen uitgeleend aan Anna.

(b) Chris heeft alle boeken die hij heeft gelezen uitgeleend.

(c) Anna heeft verschillende boeken gelezen.

Opgave 8. *(4 + 4 + 3 punten)*

(a) Geef een formule ϕ die uitdrukt dat een model minstens 2 elementen bevat.

(b) Nu een formule ψ die uitdrukt dat een model hoogstens 2 elementen bevat.

(c) Geef een formule χ die uitdrukt dat een model precies 2 elementen bevat. [Hint: je kunt gebruikmaken van ϕ en ψ.]

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.