Divisie Wiskunde & Informatica — Tentamen Logische Structuren
Vrije Universiteit — 17 februari 2011

Uitwerkingen

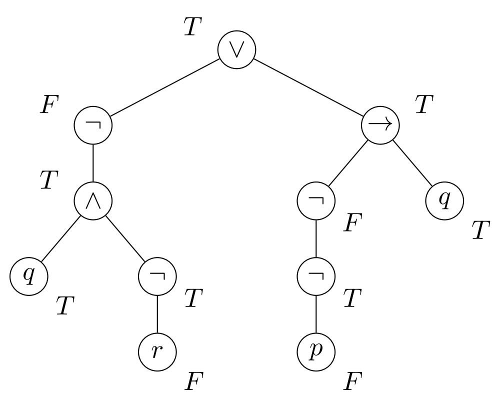
[NB: volgorde opgaven aangepast ten behoeve van lay-out]

Opgave 1.

(a) Teken de parse tree van de formule $\neg(q \wedge \neg r) \vee (\neg\neg p \to q)$

(b) Bereken met behulp van de parse tree bottom-up de waarheidswaarde van deze formule, uitgaande van de waarheidswaarden F, T, F voor p, q, r.

Oplossing



Opgave 2. Onderzoek de geldigheid van de semantische implicatie

$$(\neg q \to p) \to q \models q$$

Geef duidelijk aan hoe je tot je antwoord komt.

Oplossing

p	q	$\neg q$	$\neg q \to p$	$(\neg q \to p) \to q$	
T	T	F	T	T	
T	F	T	T	F	
F	T	F	T	T	
F	F	T	F	T	$\Leftarrow$

In de laatste regel van de waarheidstafel ($\Leftarrow$) is de premisse $(\neg q \to p) \to q$ waar, maar de conclusie q niet. De semantische implicatie is dus ongeldig.

Opgave 3. Schrijf de volgende zeven formules in kolommen, zodanig dat alle formules in één kolom onderling logisch equivalent zijn, en formules in verschillende kolommen juist niet. (Voor deze opgave telt alleen het antwoord, motivering is niet vereist.)

$$(p \vee \neg q) \rightarrow \neg q,\ \ \neg p \rightarrow p,\ \ \neg(p \rightarrow p),\ \ \neg\neg p,\ \ p \rightarrow (p \vee \neg q),\ \ p \wedge \neg p,\ \ p \rightarrow \neg q$$

Oplossing

$(p \vee \neg q) \rightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow p$	$\neg(p \rightarrow p)$	$p \rightarrow (p \vee \neg q)$
$p \rightarrow \neg q$	$\neg\neg p$	$p \wedge \neg p$	

Opgave 4. In deze opgave over booles rekenen staat de $\cdot$ voor conjunctie, de $+$ voor (inclusieve) disjunctie en $'$ voor negatie. De $\cdot$ bindt sterker dan de $+$.
Bereken (of vereenvoudig) de boolese expressie

$$(x' + y')' + x' \cdot y$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
(x' + y')' + x' \cdot y &= x'' \cdot y'' + x' \cdot y \\
&= x \cdot y + x' \cdot y \\
&= (x + x') \cdot y \\
&= 1 \cdot y \\
&= y
\end{aligned}$$

Opgave 5. Hoe kun je met een satsolver onderzoeken of een formule ϕ een contingentie is?

Oplossing De formule ϕ is een contingentie als ϕ noch een contradictie is, noch een tautologie. Dat is het geval als zowel ϕ als $\neg\phi$ satisfiable zijn. Je moet de satsolver dus twee keer runnen: eerst op ϕ, dan op $\neg\phi$.

Opgave 10.

(a) Schrijf *vijftien* als binair getal.

(b) Wat is de uitkomst van de volgende binaire optelling?

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & + \\ \hline \end{array}$$

Oplossing

(a) 1111

(b) 11101

Opgave 6. Gegeven is de volgende waarheidstafel:

p	q	r	?
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

(a) Bepaal een disjunctieve normaalvorm (DNV) die met deze waarheidstafel correspondeert.

(b) Bepaal een conjunctieve normaalvorm (CNV) die met deze waarheidstafel correspondeert.

(c) Transformeer de in (b) gevonden CNV naar het standaard inputformat voor satsolvers

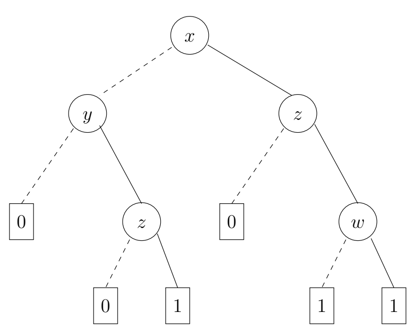
Oplossing

(a) $(p \land q \land \neg r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land \neg r)$

(b) $(\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r) \land (p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor q \lor r)$

(c)
```
p cnf 3 4
-1 -2 -3 0
1 -2 -3
1 2 -3 0
1 2 3 0
```

Opgave 7. Bekijk deze BDT van een boolese functie $f(w, x, y, z)$.

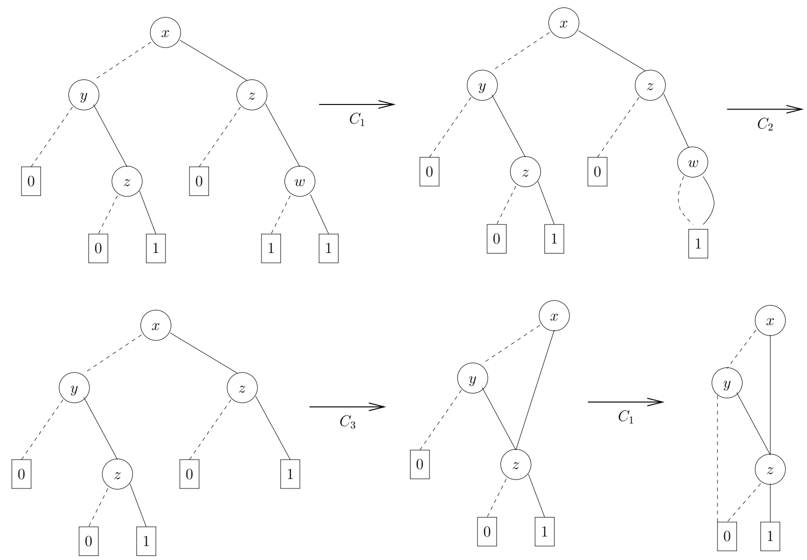


(a) Bepaal een gereduceerde BDD van de functie f en laat zien hoe je deze bereikt met reductiestappen volgens de regels (C1-3).

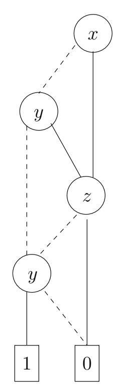
(b) Geef ook een gereduceerde BDD voor de functie $\overline{f} \cdot y$.

Oplossing

(a)



(b)



Opgave 8. Op het eiland van leugenaars en waarheidsprekers is iedere bewoner een leugenaar of een waarheidsspreker. Op het eiland kom je a en b tegen en a zegt:

> "Ik ben een leugenaar, maar b niet"

(a) Bepaal van a en b of ze leugenaar of waarheidspreker zijn. Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.

(b) Wat is voor (a) de cruciale geldige semantische implicatie?

Oplossing

(a) Op grond van wat a zegt geldt de formule $W_a \leftrightarrow (\neg W_a \wedge W_b)$.

Je kunt direct een waarheidstafel maken:

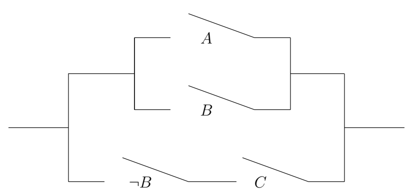
W_a	W_b	$\neg W_a$	$\neg W_a \wedge W_b$	$W_a \leftrightarrow (\neg W_a \wedge W_b)$	
T	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	
F	F	T	F	T	$\Leftarrow$

De vierde regel is de enige waarin de formule $W_b \leftrightarrow (\neg W_a \vee \neg W_b)$ waar is. Dus kunnen W_a en W_b alleen maar F zijn: a en b zijn allebei leugenaars.

(b) We kunnen deze conclusie trekken vanwege de geldigheid van de semantische implicatie:

$$W_a \leftrightarrow (\neg W_a \wedge W_b) \models \neg W_a \wedge \neg W_b$$

Opgave 9. Beschouw het volgende switching circuit:



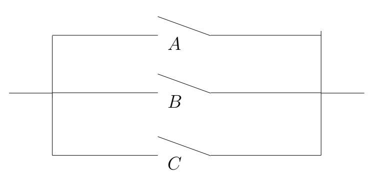
(a) Welke formule wordt door dit switching circuit gerepresenteerd?

(b) Vereenvoudig het switching circuit zoveel mogelijk.

Oplossing

(a) $A \vee B \vee (\neg B \wedge C)$

(b)



[NB: Je kunt om dit circuit te vinden direct redeneren dat de $\neg B$-switch overbodig is. Als hij de stroom via de C-switch blokkeert, omdat B waar is, dan heeft dit geen effect, omdat er dan toch stroom loopt via de B-switch erboven.

Als je deze redenering niet helemaal vertrouwt, dan kun je met een waarheidstafel controleren dat $A \vee B \vee (\neg B \wedge C) \equiv A \vee B \vee C$.]

Opgave 11. Vertaal met de gegeven vertaalsleutel de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica.

Bxy:	x is broer van y
Kxy:	x bewondert y
a:	Anna
c:	Chris

(a) Chris bewondert zichzelf niet.

(b) Er is iemand die zichzelf niet bewondert.

(c) Anna bewondert al haar broers.

(d) Chris bewondert iedereen die zichzelf niet bewondert.

Oplossing

(a) $\neg Kcc$

(b) $\exists x \neg Kxx$

(c) $\forall x(Bxa \to Kax)$

(d) $\forall x(\neg Kxx \to Kcx)$