Dr. J. van Mill

Over het verschuiven van problemen naar het oneindige door middel van kleine bewegingen.

REDE *uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van persoonlijk hoogleraar in de zuivere wiskunde in het bijzonder de topologie aan de faculteit der wiskunde en natuurwetenschappen/subfaculteit der wiskunde en informatica van de Vrije Universiteit te Amsterdam op 24 april 1986.*

Dr. J. van Mill

Over het verschuiven van problemen naar het oneindige door middel van kleine bewegingen.

Mijnheer de Rector,

Dames en Heren,

In deze rede, waarmee ik mijn ambt aanvaard, zal ik het hebben over iets dat in het normale leven een veelvuldig gebruikt mechanisme is, namelijk, het ontlopen van moeilijkheden. Diepe denkers zijn van mening dat dit mechanisme essentieel is voor het welzijn van iedere mens, dus ook voor het welzijn van een nieuw benoemde hoogleraar in de wiskunde. Het feit dat mijn ambtsaanvaarding enkele jaren na mijn benoeming plaatsvindt duidt hier al op en het is dan ook te danken aan een zeer overredende figuur binnen de Subfaculteit Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit dat ik nu voor U sta en het probleem van de oratie niet naar het oneindige verschoven heb.
Vanmiddag zullen wij hopelijk zien dat de zojuist genoemde diepe denkers het soms bij het goede eind hebben: in de wiskunde kunnen we moeilijkheden van een bepaalde soort oplossen door ze oneindig vaak uit de weg te gaan. Door deze vreemde gang van zaken is het mogelijk het onmogelijke waar te laten worden en een onversaagd dienaar van de wetenschap te zijn.
Aan het voorafgaande merkt U vermoedelijk al dat er een verschil is tussen de dagelijkse en de wiskundige wereld. Wij, gewone stervelingen, kunnen moeilijkheden slechts een eindig aantal malen uit de weg gaan: op zeker moment gaan we er aan ten onder, lossen we ze op, leren we er mee te leven zoals dat zo mooi heet, of veranderen we de werkelijkheid. Het achteloos uitgesproken zinnetje: 'In de wiskunde kunnen we moeilijkheden van een bepaalde soort oplossen door ze oneindig vaak uit de weg te gaan', duidt er op dat in de wiskundige wereld soms een grotere vrijheid bestaat dan in het dagelijks leven. Deze vrijheid bestaat er niet in dat het mogelijk is de werkelijkheid te veranderen maar stelt de wiskundige soms in staat zijn leefwereld zo te kiezen dat binnen redelijke grenzen de verschijnselen zijn zoals hij dat wil. In het extreme komen we dit tegen bij de moderne verzamelingenleer. Daar is het normaal zich op hetzelfde moment binnen verschillende wiskundige werelden te bevinden, de zogenaamde modellen, en vanuit de ene wereld een andere te creëren waarbinnen een bepaald verschijnsel zich wel of niet voordoet.(1) Het is nu niet het juiste moment daar verder op door te gaan. Wij stellen ons ten doel een wiskundige wereld van meetkundige aard te construeren waarbinnen het mogelijk is bepaalde moeilijkheden te ontlopen en die ons bovendien in staat stelt om zinnige uitspraken over de 'normale' wereld te doen. In de wetenschap is zo'n procedure niet ongewoon. De speciale relativiteitstheorie van Einstein kan het beste worden geformuleerd door aan de driedimensionale euclidische ruimte een nieuwe coördinaatrichting toe

te voegen, de zogenaamde tijdas, en de problemen binnen de daardoor ontstane vierdimensionale euclidische ruimte op te lossen. Hierdoor kunnen verschijnselen uit de normale fysische werkelijkheid verklaard worden die voordien onbegrijpelijk waren. Ook dichter bij huis zijn er dergelijke voorbeelden te vinden. Ik doceer met veel plezier aan eerstejaars studenten het vak Lineaire Algebra. De belangrijkste stelling uit mijn college is de volgende:

Iedere reële symmetrische n x n - matrix heeft een reële eigenwaarde.

Deze stelling heeft zeer belangrijke toepassingen: er kan bijvoorbeeld mee bewezen worden dat elke kegelsnede op hoofdassen gebracht kan worden, en ook dat bij ieder aantal waarnemingen een lijn bestaat die het 'beste' bij die waarnemingen aansluit, een zogenaamde regressielijn. Het bewijs van de stelling is indirect. Het lichaam van de reële getallen wordt uitgebreid tot het lichaam van de complexe getallen - wereldvergroting - en een bepaalde vergelijking wordt door het aanroepen van de hoofdstelling van de algebra binnen die nieuwe wereld opgelost. Van de oplossing van de vergelijking wordt tenslotte aangetoond dat deze toch eigenlijk tot de 'oude' wereld van de reële getallen behoort en zo is bewezen dat de vergelijking binnen het lichaam van de reële getallen oplosbaar is.[2]
Ik heb vanmiddag de opgave U iets van mijn wiskundige wereld te laten zien. Niet alles zal helder, duidelijk, en op het eerste horen begrijpelijk zijn; mocht U echter door mijn rede gegrepen worden en mocht in U de behoefte ontstaan meer van dit alles te weten te komen dan raad ik U aan zich als student wiskunde aan deze universiteit te laten inschrijven. Ik verzeker U dat U later deze daad als één van de meest opwindende uit Uw leven zult beschouwen.
Laten we nu een rechte lijn bekijken, voor het gemak de reële rechte $\mathbb{R}$.

$$\longleftarrow\!\!\!\longrightarrow \qquad \mathbb{R}$$

Figuur 1.

Deze lijn is in de ogen van vele wiskundigen een eenvoudig object. Toch doen zich al snel merkwaardige verschijnselen voor. Bezie de volgende oneindige sommen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1081} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{1024} + \ldots\ldots$$