Supplement Verzamelingenleer

A.J.M. van Engelen en K. P. Hart

Hoofdstuk 1

Het Keuzeaxioma

Het fundament van de hedendaagse verzamelingenleer werd in de vorige eeuw gelegd door Georg Cantor. Cantor gebruikte daarbij de intuïtieve notie van een verzameling als een 'geheel van onderscheiden objecten'. Aan het eind van de vorige eeuw en het begin van deze eeuw werd echter duidelijk dat het ongebreidelde gebruik van verzamelingen tot tegenspraken aanleiding geeft. Zo gaf Bertrand Russell in 1902 het voorbeeld van de verzameling van alle verzamelingen die geen element zijn van zichzelf. Dat wil zeggen hij nam $y = \{x : x \notin x\}$; maar voor deze y geldt $y \in y \iff y \notin y$. Om dit soort paradoxen te voorkomen werden diverse axiomasystemen ontwikkeld, waarvan dat van Zermelo en Fraenkel (ZF) wel het bekendste is. Deze systemen geven een limitatieve opsomming van de wijzen waarop uit oude verzamelingen nieuwe geconstrueerd kunnen worden. Aanvankelijk is alleen $\varnothing$ gegeven, daarna mogen we bijvoorbeeld twee verzamelingen verenigen en de machtsverzameling nemen, en kunnen we onder meer ook de productverzameling construeren. Al te grote verzamelingen (zoals die van Russell) kunnen we op deze wijze niet krijgen, en algemeen wordt aangenomen dat het aldus verkregen systeem vrij is van tegenspraken.

Het feit dat de productverzameling in het systeem ZF *bestaat* betekent echter nog niet dat het ook mogelijk is een *element* van die verzameling aan te wijzen! Daarvoor is het nodig om nog een extra axioma aan de axioma's van Zermelo-Fraenkel toe te voegen, het zogenaamde Keuzeaxioma (AC = Axiom of Choice), dat luidt:

KEUZEAXIOMA (AC). Als $\{X_i\}_{i\in I}$ een niet-lege familie van niet-lege topologische ruimten is, dan is $\prod_{i\in I} X_i$ ook niet leeg.

Dit axioma kan niet uit de overige axioma's van ZF worden afgeleid (vergelijk de situatie van het Parallellenpostulaat van Euclides), maar men kan bewijzen dat als ZF niet tot tegenspraken leidt, ook ZF + AC = ZFC niet tot tegenspraken leidt. Het grootste deel van de wiskundige wereld accepteert AC als axioma en gebruikt het (vaak zonder het te beseffen).

Wie denkt dat het Keuzeaxioma een open deur intrapt moet de volgende opgave maar eens maken.

▶ **1.1.** OPGAVE. Zij $\mathcal{P}^+(\mathbb{R})$ de familie van alle niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Geef een punt in het product $\prod\{A : A \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R})\}$ aan.

Er is een groot aantal met het keuzeaxioma equivalente (equivalent in ZF!) beweringen bekend, waarvan we er hier twee vermelden. Eerst nog een definitie.

1.2. DEFINITIE. Zij $(X, \leqslant)$ een partieel geordende verzameling.

(a) Een *keten* in X is een deelverzameling van X die door $\leqslant$ lineair geordend wordt.
(b) Een *maximaal element* in X is een $x \in X$ zodat voor elke $y \in X$ met $x \leqslant y$ geldt dat $x = y$.
(c) $(X, \leqslant)$ is een *welgeordende verzameling* (en $\leqslant$ een *welordening*) als elke niet-lege deelverzameling van X een kleinste element heeft.

Er zij opgemerkt dat een maximaal element niet noodzakelijk een grootste element hoeft te zijn (een maximaal element hoeft niet met elk element vergelijkbaar te zijn), en dat een welgeordende verzameling in het bijzonder lineair geordend is (elke deelverzameling met twee elementen heeft een kleinste element).

Dan nu de twee equivalenten van het Keuzeaxioma.

STELLING VAN ZERMELO. *Elke verzameling kan worden welgeordend.*

De Stelling van Zermelo heet ook wel de *Welordeningsstelling*.

LEMMA VAN ZORN. *Elke partieel geordende verzameling waarin elke keten een bovengrens heeft, heeft een maximaal element.*

Een belangrijke topologische toepassing van het Lemma van Zorn is

1.3. LEMMA VAN ALEXANDER. *Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor X. Dan is X compact dan en slechts dan als elke open overdekking $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{S}$ van X een eindige deeloverdekking heeft.*

Bewijs. Neem aan dat elke open overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ een eindige deeloverdekking heeft, maar dat er toch een open overdekking van X bestaat zonder eindige deeloverdekking. We zullen laten zien dat als er eenmaal maar één zo'n open overdekking zonder eindige deeloverdekking is, er zelfs een open overdekking $\mathcal{O}$ zonder eindige deeloverdekking bestaat zó dat $\mathcal{O} \cap \mathcal{S}$ ook X al overdekt. Wegens de aanname is er dan echter wel een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$, en we hebben de gewenste tegenspraak. Het idee is om de open overdekking "zo groot mogelijk" te maken, zodat daarmee ook de "kans" dat de subbasiselementen al overdekken zo groot mogelijk is. Om dat te bewerkstelligen gebruiken we het Lemma van Zorn.

We definiëren eerst een partieel geordende verzameling: zij

$$\mathbf{A} = \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ is een open overdekking van } X \text{ zonder eindige deeloverdekking}\},$$

partieel geordend door inclusie. Volgens aanname is $\mathbf{A} \neq \varnothing$. Zij $\mathbf{K} = \{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ een niet-lege keten in $\mathbf{A}$, en definieer $\mathcal{V} = \bigcup \mathbf{K}$. Dan is $\mathcal{V}$ een open overdekking van X en als $\mathcal{V}'$ een eindige deelfamilie van $\mathcal{V}$ eindig is dan is $\mathcal{V}$ een eindige deelfamilie van zekere $\mathcal{V}_i$ (want $\mathbf{K}$ is een keten!) zodat $\mathcal{V}'$ niet X overdekt. Dus $\mathcal{V} \in \mathbf{A}$, zodat $\mathcal{V}$ een bovengrens is van $\mathbf{K}$. Volgens het Lemma van Zorn heeft $\mathbf{A}$ nu een maximaal element, zeg $\mathcal{O}$. We zullen laten zien dat $\mathcal{O} \cap \mathcal{S}$ een overdekking is van X. Zij $x \in X$. Omdat $\mathcal{O} \in \mathbf{A}$ is $\mathcal{O}$ in het bijzonder een open overdekking van X, en dus bestaan er een $U \in \mathcal{O}$ en eindig vele $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ zó dat $x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq U$. *Bewering: één van de S_i is element van* $\mathcal{O}$ (en dus $x \in S_i \in \mathcal{O} \cap \mathcal{S}$). Anders zou voor elke i de familie $\mathcal{O}_i = \mathcal{O} \cup \{S_i\}$ een open overdekking van X zijn met $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}_i$ en dus geen element van $\mathbf{A}$. Maar dat betekent dat elke $\mathcal{O}_i$ een eindige deeloverdekking heeft, en dus bestaat een eindige $\mathcal{O}_i' \subseteq \mathcal{O}$ zó dat $\mathcal{O}_i' \cup \{S_i\}$ een overdekking is van X. Zij nu $\mathcal{O}' = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i' \cup \{U\}$. Dan is $\mathcal{O}'$ een eindige deelfamilie van $\mathcal{O}$, dus we zijn klaar als we kunnen laten zien dat $\mathcal{O}'$ een overdekking is van X. Zij daartoe $y \in X$ willekeurig. Als $y \in \bigcup \mathcal{O}_i'$ voor zekere i dan zeker $y \in \bigcup \mathcal{O}'$, dus neem aan dat $y \notin \bigcup \mathcal{O}_i'$ voor elke i. Omdat $\mathcal{O}_i' \cup \{S_i\}$ een overdekking is van X moet dan $y \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq U$. □

Hoofdstuk 2

Kardinaalgetallen

In dit hoofdstuk zullen we een klein stukje verzamelingenleer ontwikkelen. We doen dat op een naïeve manier, dat wil zeggen: we zullen geen formeel axiomasysteem ontwikkelen, maar een intuïtief verzamelingsbegrip hanteren. Zoals we in Hoofdstuk 1 hebben gezien moeten we daarbij wel voorzichtig zijn met met 'te grote' objecten. Om misverstanden te voorkomen zullen we voor dergelijke objecten de benaming *klasse* aanhouden (bijvoorbeeld: de klasse van alle verzamelingen). Verder nemen we aan dat het Keuzeaxioma geldt.

2.1. Definitie. Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als er een bijectie $f : A \to B$ bestaat.

Gelijkmachtigheid is een equivalentierelatie op de klasse van alle verzamelingen. We noemen de equivalentieklasse van A het *kardinaalgetal* (of de *kardinaliteit*, of de *machtigheid*) van A, notatie $|A|$ (ook wel $\bar{\bar{A}}$).

De volgende definitie benoemt enkele veel voorkomende kardinaalgetallen.

2.2. Definitie. (a) 0 is het kardinaalgetal van $\varnothing$.
(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is n is het kardinaalgetal van $\{0, \dots, n-1\}$.
(c) $\aleph_0$ (aleph-nul) is het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$.
(d) Het kardinaalgetal van $\mathbb{R}$ is $\mathfrak{c}$. De $\mathfrak{c}$ komt van het woord $\mathfrak{c}$ontinuum.

De kardinaalgetallen 0, 1, 2, ... heten de *eindige* kardinaalgetallen, de overige kardinaalgetallen heten *oneindig*. Verder heet een kardinaalgetal $|A|$ *(over)aftelbaar* als A (over)aftelbaar is; dit hangt uiteraard niet af van de keuze van A.

Ordening

Op de klasse van kardinaalgetallen kunnen we op natuurlijke wijze een ordening definiëren.

2.3. Definitie. Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn, zeg $\kappa = |A|$ en $\lambda = |B|$. Dan is $\kappa \leqslant \lambda$ dan en slechts dan als er een injectie $f : A \to B$ bestaat.

Het is eenvoudig na te gaan dat deze definitie onafhankelijk is van de keuze van de representanten A en B. Zoals gebruikelijk schrijven we $\kappa < \lambda$ als $\kappa \leqslant \lambda$ maar $\kappa \neq \lambda$. Het is eenvoudig in te zien dat een kardinaalgetal κ eindig is dan en slechts dan als $\kappa < \aleph_0$, en aftelbaar dan en slechts dan als $\kappa \leqslant \aleph_0$. Met Stelling 2.6 hierna volgt dan tevens dat $\kappa \geqslant \aleph_0$ als κ oneindig is, en $\kappa > \aleph_0$ als κ overaftelbaar is.

De gedefinieerde ordening is evident reflexief en transitief, en de volgende stelling laat zien dat het een partiële ordening is.

2.4. Stelling van Cantor-Bernstein. *Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn. Als $\kappa \leqslant \lambda$ en $\lambda \leqslant \kappa$ dan $\kappa = \lambda$.*

Bewijs. Laat A en B verzamelingen zijn met $|A| = \kappa$ en $|B| = \lambda$. Omdat $\kappa \leqslant \lambda$ bestaat er een injectie $f : A \to B$, en omdat $\lambda \leqslant \kappa$ bestaat er een injectie $g : B \to A$. Definieer recursief $A_1 = A$, $B_1 = B$, $A_{n+1} = (g \circ f)[A_n]$ en $B_{n+1} = (f \circ g)[B_n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $A_n \supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}$ en $B_n \supseteq f[A_n] \supseteq B_{n+1}$. Definieer nu $h : A \to B$ door

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in \bigcap_n A_n \cup \bigcup_n (A_n \setminus g[B_n]), \\ g^{-1}(x) & \text{als } x \in \bigcup_n (g[B_n] \setminus A_{n+1}). \end{cases}$$

Dan is h de gezochte bijectie. □

▶ **2.5.** Opgave. Verifieer dat h inderdaad een bijectie is.

Er geldt zelfs dat $\leqslant$ een lineaire ordening is van de kardinaalgetallen.

2.6. Stelling. *Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn. Dan $\kappa \leqslant \lambda$ of $\lambda \leqslant \kappa$.*

BEWIJS. Als $A = \varnothing$ of $B = \varnothing$ dan is de stelling triviaal, dus neem aan dat $A \neq \varnothing$ en $B \neq \varnothing$. We nemen verder aan dat op A een welordening $<$ is gedefinieerd (Stelling van Zermelo). We gaan proberen recursief een injectie $f : A \to B$ te definiëren. We beginnen met voor $a_0 = \min A$ een willekeurig element $f(a_0) \in B$ te kiezen. Zij nu $a \in A$ met $a > a_0$, en neem als inductiehypothese dat $f(x)$ reeds gedefinieerd is voor $x < a$ (maar nog voor geen enkele $x \geqslant a$). Definieer $B_a = \{f(x) : x < a\}$. Als $B_a \neq B$, dan kiezen we voor $f(a)$ een willekeurig element uit $B \setminus B_a$.

Als we deze constructie voor elke $a \in A$ kunnen voltooien dan is f een injectie, en volgt $\kappa \leqslant \lambda$. Als de inductieve definitie op zeker moment stokt, dan is dat omdat op dat moment $B_a = B$. Dan bestaat dus voor elke $b \in B$ één $x_b < a$ met $f(x_b) = b$. Maar dan is $b \mapsto x_b$ een injectie van B naar A. □

We geven de volgende stelling zonder bewijs.

2.7. STELLING. *De kardinaalgetallen worden welgeordend door $\leqslant$.*

Bewerkingen

We definiëren nu sommen, producten en exponenten van kardinaalgetallen. De definities maken gebruik van representanten, en voor elk geval moet dus nagegaan worden dat de definitie onafhankelijk is van de keuze van de representanten.

2.8. DEFINITIE. Zij $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ een verzameling kardinaalgetallen, en zij A_i een verzameling met $|A_i| = \kappa_i$ $(i \in I)$.

(a) $\sum_{i \in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i \in I} \{i\} \times A_i\right|$.

(b) $\prod_{i \in I} \kappa_i = \left|\prod_{i \in I} A_i\right|$.

Als A en B verzamelingen zijn, dan is A^B de verzameling van alle afbeeldingen van B naar A.

2.9. DEFINITIE. Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn, en A en B verzamelingen met $|A| = \kappa$ en $|B| = \lambda$. Dan is $\kappa^\lambda = |A^B|$.

Met betrekking tot de laatste definitie merken we nog op dat $f(\phi) = \big(b, \phi(b)\big)_{b \in B}$ een bijectie tussen A^B en $\prod_{b \in B} \{b\} \times A$ definieert, dus $\kappa^\lambda = \prod_{b \in B} \kappa$.

Enkele eenvoudige eigenschappen van de gedefinieerde operaties zijn:

2.10. PROPOSITIE. *Laat κ, λ en μ kardinaalgetallen zijn.*

(a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.

(b) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu) = \kappa + \lambda + \mu$.

(c) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.

(d) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$.

(e) $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

(f) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

► **2.11.** OPGAVE. Bewijs deze formules.

Minder eenvoudig is de volgende stelling, die we weer niet zullen bewijzen.

2.12. STELLING. *Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn met $0 < \kappa \leqslant \lambda$ en λ oneindig. Dan is $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \lambda$.*

2.13. STELLING. *Zij A een verzameling, en zij $\mathcal{P}(A)$ de machtsverzameling van A. Dan is $\left|\mathcal{P}(A)\right| = 2^{|A|}$.*

BEWIJS. Definieer $f : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ door $f(B) = \chi_B$, waarbij χ_B de karakteristieke functie is van B. Dan is f een bijectie. □

2.14. STELLING VAN CANTOR. *Zij κ een kardinaalgetal. Dan $\kappa < 2^\kappa$.*

BEWIJS. Zij A een verzameling met $|A| = \kappa$, en kies $\mathcal{P}(A)$ als representant van 2^κ (Stelling 2.13). Definieer $f : A \to \mathcal{P}(A)$ door $f(a) = \{a\}$ $(a \in A)$, dan is f injectief en dus $\kappa \leqslant 2^\kappa$. We moeten nog laten zien dat er geen bijectie kan bestaan tussen A en $\mathcal{P}(A)$. Zij dus $g : A \to \mathcal{P}(A)$. We zullen zien dat g niet eens surjectief kan zijn. Immers, zij $B = \{a \in A : a \notin g(a)\}$. Als er nu een $a \in A$ zou zijn met $g(a) = B$, dan geldt dat $a \in g(a)$ dan en slechts dan als $a \notin g(a)$, een tegenspraak. □

Een gevolg is:

2.15. STELLING. *Zij K een verzameling kardinaalgetallen. Dan is er een kardinaalgetal λ zó dat $\kappa < \lambda$ voor elke $\kappa \in K$.*

BEWIJS. Zij $\mu = \sum_{\kappa \in K} \kappa$ en $\lambda = 2^{\mu}$. □

Omdat $\leqslant$ een welordening is op de klasse van alle kardinaalgetallen bestaat dus ook voor elke verzameling K van kardinaalgetallen een *kleinste* kardinaalgetal groter dan elk element van K (en dus is de klasse van alle kardinaalgetallen zelf geen verzameling!). In het bijzonder is er een eerste overaftelbaar kardinaalgetal $\aleph_1$ (het kleinste kardinaalgetal groter dan $\aleph_0$), en algemener voor elke kardinaalgetal κ een kleinste kardinaalgetal κ^+ groter dan κ: de *opvolger* van κ (dus $\aleph_1 = \aleph_0^+$). De achtereenvolgende opvolgers van $\aleph_1$ geven we aan met $\aleph_2$, $\aleph_3$, ... Voor het kleinste kardinaalgetal groter dan elke $\aleph_n$ gebruiken we de notatie $\aleph_\omega$.

2.16. STELLING. (a) *Zij κ een kardinaalgetal. Dan is $\kappa^+ \leqslant 2^\kappa$; in het bijzonder is $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$.*
(b) $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

BEWIJS. Onderdeel (a) volgt onmiddellijk uit Stelling 2.14.

Voor (b) merken we eerst op dat $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Bij elke $x \in (0,1)$ kunnen we een rij $\langle x_n \rangle_n$ van nullen en enen kiezen zó dat $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$ (een binaire representatie van x). Bij sommige x-en hebben we de keuze uit twee rijen: bij $\frac{1}{2}$ hoort zowel $(1,0,0,0,\ldots)$ als $(0,1,1,1,\ldots)$; in dat geval kiezen we de rij die in nullen eindigt. Dit geeft een injectieve afbeelding van $(0,1)$ naar $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Omgekeerd definieert $\langle x_n \rangle_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}$ een injectie van van $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ naar $[0,1)$. Pas nu de Stelling van Cantor-Bernstein toe. □

► **2.17.** OPGAVE.

a) Toon aan dat de afbeelding $x \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ goedgedefinieerd en injectief is.
b) Toon aan dat $\langle x_n \rangle_n \mapsto \sum_n x_n 3^{-n}$ injectief is.
c) Bewijs dat $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2$. *Aanwijzing*: maak een bijectie tussen $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ door rijen te mengen.

Deze laatste stelling werpt uiteraard de vraag op of $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

CONTINUUMHYPOTHESE (CH). $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Men heeft bewezen dat in het axiomasysteem ZFC noch de Continuumhypothese noch de ontkenning ervan bewezen kan worden. De positie van CH ten opzichte van ZFC is daarmee dezelfde als die van het Keuzeaxioma ten opzichte van ZF.

Dezelfde opmerkingen kunnen gemaakt worden ten aanzien van de voor de hand liggende generalisatie naar willekeurige kardinaalgetallen:

GEGENERALISEERDE CONTINUUMHYPOTHESE (GCH). Voor elk oneindig kardinaalgetal κ geldt $\kappa^+ = 2^\kappa$.

Dit supplement is een uittreksel uit het diktaat Topologie van A.J.M. van Engelen en K. P. Hart.