

§3.1:11 $D(A) = 0 \Leftrightarrow \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} = 0 \Leftrightarrow (\forall x, y \in A)(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (A = \emptyset \vee |A| = 1).$

§3.2:8 Het volstaat op te merken dat als E en F deelverzamelingen zijn van \mathbb{R} dan is $\inf(E \cup F)$ gelijk aan $\min\{\inf E, \inf F\}$.

§3.3:5 (a) $\text{int } A \subseteq A \subseteq B$, dus $\text{int } A \subseteq \text{int } B$ want $\text{int } B$ is de grootste open deelverzameling van B .

(b) $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, dus $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ (Stelling 3.10).

(c) $x \in A' \Leftrightarrow (\forall \text{omgeving } U \text{ van } x)(\exists a \in A \setminus \{x\})(a \in U) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\forall \text{omgeving } U \text{ van } x)(\exists a \in B \setminus \{x\})(a \in U) \Leftrightarrow x \in B'$ want $A \subseteq B$.

(d) $A = \{x \in (0, 1) : x \in \mathbb{Q}\}, B = (0, 2)$. Dan $A \subseteq B$, maar $\text{Fr}(A) = [0, 1]$ en $\text{Fr}(B) = \{0, 2\}$.

§3.4:4 (a) \Rightarrow (b).

Merk op dat $f^{-1}(\overline{f(A)})$ een gesloten verzameling is (Stelling 3.13) die A bevat, dus $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ (Stelling 3.10), m.a.w.,

$$f(\overline{A}) \subseteq ff^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

(b) \Rightarrow (c).

We bewijzen allereerst dat voor elke $B \subseteq Y$ geldt dat $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Dat is gemakkelijk, we passen (b) toe op de verzameling $A = f^{-1}(B)$ en vinden

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{ff^{-1}(B)} \subseteq \overline{B},$$

zodat $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Nu gebruiken we dit voor $Y \setminus B$ om (c) te bewijzen. Welnu, $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$, en dus

$$\begin{aligned} f^{-1}(\text{int } B) &= f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \\ &\subseteq X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} \\ &= \text{int } f^{-1}(B). \end{aligned}$$

(c) \Rightarrow (a). Zij $U \subseteq Y$ open. Dan $U = \text{int } U$, en dus uit (c) volgt dat $f^{-1}(U) \subseteq \text{int } f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$. Dus $f^{-1}(U)$ is open, m.a.w., f is continu met Stelling 3.13.

§3.5:6 We zullen laten zien dat d' een metriek is. Dat d' voldoet aan (a) en (b) van de definitie op pag. 55, is duidelijk. Het gaat om de driehoeksongelijkheid (c). Laat x, y en z elementen zijn van X en zij $a = d(x, y), b = d(y, z)$ en $c = d(x, z)$. Omdat elk van de getallen $2, 1+a, 1+b$ en $a+b$ niet kleiner is dan 1 of c , geldt

$$\min\{2, 1+a, 1+b, a+b\} \geq \min\{1, c\}$$

en dus

$$\begin{aligned} d'(x, y) + d'(y, z) &= \min\{1, a\} + \min\{1, b\} \\ &= \min\{2, 1+a, 1+b, a+b\} \geq \min\{1, c\} = d'(x, z). \end{aligned}$$

Dat d en d' equivalent zijn is triviaal.

§3.6:7 Dat $0 \leq \varrho(f, g) < \infty$ is duidelijk omdat d' begrensd is.

$$\begin{aligned} \varrho(f, g) = 0 &\Leftrightarrow \sup\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\} = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in X)(d'(f(x), g(x)) = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(f(x) = g(x)) \Leftrightarrow f = g. \end{aligned}$$

Dat $\varrho(f, g) = \varrho(g, f)$ is triviaal.

Tenslotte:

$$\begin{aligned} \varrho(f, g) &= \sup\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\} \\ &\leq \sup\{d'(f(x), h(x)) + d'(h(x), g(x)) : x \in X\} \\ &= \sup\{d'(f(x), h(x)) : x \in X\} + \sup\{d'(h(x), g(x)) : x \in X\} \\ &= \varrho(f, h) + \varrho(h, g). \end{aligned}$$

§3.7:13 Zij $(x_n)_n$ een Cauchyrij in X . Voor elke n kies een element $a_n \in A$ met $d(x_n, a_n) \leq 1/n$. Hier gebruiken we dat A dicht is. We beweren dat de rij $(a_n)_n$ Cauchy is. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een N_1 zodat $d(x_n, x_m) < 1/3\varepsilon$ voor alle $n, m \geq N_1$. Kies N_2 zodat $1/N_2 < 1/3\varepsilon$. Dan geldt voor $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$ dat

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_m) \\ &< 1/3\varepsilon + 1/3\varepsilon + 1/3\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Volgens aanname geldt nu dat $a_n \rightarrow x$, voor zekere $x \in X$. Een redenering zoals boven geeft $x_n \rightarrow x$ (teken een plaatje).

§4.1:9 (a) Het is duidelijk dat $\emptyset, X \in \mathcal{T}^*$ want $X = X \setminus \emptyset$. Zij $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}^*$. Als $\mathcal{A} = \emptyset$, dan $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset \in \mathcal{T}^*$. Als $\mathcal{A} \neq \emptyset$, zeg $A \in \mathcal{A}$, dan $X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subseteq X \setminus A$, en is dus aftelbaar. M.a.w., $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}^*$. Tenslotte, als $A, B \in \mathcal{T}^*$ dan $A \cap B \in \mathcal{T}^*$, want

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B),$$

en de vereniging van twee aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

(b) Zij $x \in X$, en $A \subseteq X$. Als A aftelbaar is, dan is ook $B = A \setminus \{x\}$ aftelbaar, en $U = X \setminus B$ is een open verzameling die x bevat, terwijl tevens $U \cap A \subseteq \{x\}$. Dus $A' = \emptyset$. Als A overaftelbaar is dan is ook $B = A \setminus \{x\}$ overaftelbaar. Als U een open verzameling is van X die x bevat, dan is $X \setminus U$ aftelbaar, en dus $U \cap B \neq \emptyset$. M.a.w., $x \in A'$.

(c) Als $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}^*$ aftelbaar is, dan is

$$X \setminus \bigcap \mathcal{B} = \bigcup \{X \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$$

aftelbaar want de vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar. M.a.w., $X \setminus \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{T}^*$.

§4.2:7 (a) \Rightarrow (b).

Zij $U \subseteq X$ een niet-lege open verzameling. Dan $U \not\subseteq \overline{B}$, want B is nergens dicht. Dus $U \cap (X \setminus \overline{B}) \neq \emptyset$. Conclusie: $X \setminus \overline{B}$ is dicht.

(b) \Rightarrow (c).

Triviaal, want $X \setminus \overline{B}$ dicht betekent dat $\overline{X \setminus \overline{B}} = X$.

(c) \Rightarrow (d).

Triviaal, want (c) zegt dat $X = \overline{X \setminus \overline{B}}$.

(d) \Rightarrow (a).

Merk op dat $\overline{B} \subseteq \overline{X \setminus \overline{B}}$. Als U een niet-lege open verzameling is die bevat is in \overline{B} , dan geldt $U \cap (X \setminus \overline{B}) = \emptyset$, en dus $U \cap \overline{X \setminus \overline{B}} = \emptyset$ (want $X \setminus U$ is gesloten). Maar dat is een tegenspraak, want $U \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{X \setminus \overline{B}}$. Dus: B is nergens dicht.

§4.3:3 De discrete topologie op een overaftelbare verzameling.

§4.3:6 Zij U_1, U_2, \dots een aftelbare omgevingsbasis van x . Definieer $S_n = U_1 \cap \dots \cap U_n$ voor elke n . Dan zijn de $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ genest en vormen ook een omgevingsbasis. Immers, zij V een open verzameling van X die x bevat. Dan bestaat er een N zodat $U_N \subseteq V$. Maar dan ook $S_N \subseteq V$. (Deze som gebruiken voor som 4).

§4.4:3 (a) Definieer $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ als volgt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

We geven $\{0, 1\}$ de discrete topologie. Dan is f gesloten, want elke deelverzameling van $\{0, 1\}$ is gesloten, maar niet continu want $f^{-1}(\{0\})$ is niet open.

(b) Zij $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de projectie $\pi(x_1, x_2) = x_1$. Dan is gemakkelijk na te gaan dat π open is (teken een plaatje). Maar π is niet gesloten. De grafiek van de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ ($x > 0$) is gesloten in \mathbb{R}^2 , maar de projectie daarvan is niet gesloten in \mathbb{R} . Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de functie $f(x) = (x, 0)$. Deze functie ‘identificeert’ \mathbb{R} met de x -as in \mathbb{R}^2 . Omdat de x -as in \mathbb{R}^2 gesloten is in \mathbb{R}^2 , maar niet open, is het gemakkelijk in te zien dat f is zoals gewent.

(c) Bezie de identiteit $i: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is i continu, maar niet open danwel gesloten. Immers, $[0, 1)$ is open én gesloten in \mathbb{S} , maar niet open in \mathbb{R} en ook niet gesloten in \mathbb{R} .

(d) Bezie de indentiteit $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$.

§4.5:9 Zij F een eindige deelverzameling van een Hausdorffruimte X , en zij $x \in F$ willekeurig. Voor elke $y \in G = F \setminus \{x\}$ bestaat er vanwege Hausdorff een open omgeving U_y van x met $y \notin U_y$. Omdat G eindig is, is $V = \bigcap_{y \in G} U_y$ een open omgeving van x die $F \setminus \{x\}$ mist. Dus x is geen limietpunt, m.a.w., F is gesloten met Stelling 4.2. Er is een gemakkelijker manier om te bewijzen dat een eindige deelverzameling F van een Hausdorffruimte X altijd gesloten is. Dat gaat als volgt. We bewijzen dat $X \setminus F$ open is. Immers, kies een willekeurige $x \in X \setminus F$. Vanwege Hausdorff, is er zoals boven voor elke $y \in F$ een open omgeving U_y van x die y niet bevat. Dan is $V = \bigcap_{y \in F} U_y$ een open omgeving van x die F mist.

- §4.5:12 $A = \mathbb{R}$ en $B = (0, 1) \cup \{2\}$. Omdat \mathbb{R} en $(0, 1)$ homeomorf zijn, kan A worden ingebed in B . Verder is B homeomorf met zichzelf, en dus zeker in te bedden in A . Tenslotte zijn A en B niet homeomorf, want B bevat een geïsoleerd punt, terwijl in A geen enkel punt geïsoleerd is.
- §5.1:4 $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ is natuurlijk samenhangend, want X is anti-Hausdorff [= elke twee niet-lege open deelverzamelingen hebben een niet-lege doorsnijding.]
- §5.2:6 Zij X een aftelbare deelruimte van \mathbb{R} , en zij C een component van X . Dan is C een samenhangende deelverzameling van X en ook van \mathbb{R} (waarom?). Als C dus niet een punt is, dan is C overaftelbaar, tegenspraak.
- §5.2:12 Laat C een component zijn van X , en stel dat C tenminste twee verschillende punten bevat, zeg a en b . Omdat X Hausdorff is, bestaat er een open omgeving U van a zodat $b \notin U$. Omdat X 0-dimensionaal is, mogen we veronderstellen dat U open-en-gesloten (= clopen) is. Merk op dat $\{U, X \setminus U\}$ een partitie is van X in twee open verzamelingen, en dat C beide snijdt. Maar dat is in tegenspraak met de samenhang van C .
- §5.3:4 Zij $f: [c, d] \rightarrow (a, b)$ een homeomorfisme. Merk op dat $[c, d] \setminus \{c\} = (c, d]$ samenhangend is. Dus is ook $f([c, d] \setminus \{c\}) = (a, b) \setminus \{f(c)\}$ samenhangend (gebruik dat f is bijectie is, en pas het Gevolg op pagina 135 toe). Maar $(a, b) \setminus \{f(c)\} = (a, f(c)) \cup (f(c), b)$ is niet samenhangend. Tegenspraak.
- §5.4:5 Ja, maar het bewijs is te moeilijk en gebruikt stof uit latere paragrafen. *Dit zal bij het deeltentamen niet worden gevraagd.*
 We gebruiken dezelfde notatie als in Voorbeeld 5.2.3. Zij $f: T \rightarrow T$ continu. De padcomponenten van T zijn A en B . Het beeld van A moet dus bevat zijn in A of in B . Zo ook voor B . Als $f(A) \subseteq A$, dan heeft f een dekpunt, want $[-1, 1]$ heeft de dekpuntseigenschap. Als $f(B) \subseteq A$, dan $f(T) = f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)} \subseteq A$, en dus weer $f(A) \subseteq A$. Het enige geval dat overblijft is dat $f(T) \subseteq B$. Omdat T compact is, bestaat er een interval $[a, b]$ zodat $f(T)$ bevat is in $S = \{(x, \sin(\pi/x)) : x \in [a, b]\}$. Maar S is een gesloten interval en heeft dus de dekpuntseigenschap. Omdat $f(S) \subseteq S$, hebben we wat we willen.
- §5.5:6 Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue surjectie, met X padsamenhangend. Kies $a, b \in Y$ willekeurig. Er bestaan $x, y \in X$ met $f(x) = a$ en $f(y) = b$. Omdat X padsamenhangend is, bestaat er een pad $\lambda: [0, 1] \rightarrow X$ met $\lambda(0) = x$ en $\lambda(1) = y$. Dan is de samenstelling $f \circ \lambda: [0, 1] \rightarrow Y$ een pad van a naar b .
- §6.1:6 Verwarrend aan deze som is dat je aan \mathbb{R} denkt als aan \mathbb{R} met de euclidische topologie. Maar hier is \mathbb{R} voorzien van de co-aftelbare topologie, en dat maakt alles geheel anders.
 Zij X een oneindige verzameling die we voorzien van de co-aftelbare topologie. We bewijzen dat X niet compact is. Zij A een aftelbaar oneindige deelverzameling van X , en zij

$$\mathcal{U} = \{X \setminus (A \setminus \{a\}) : a \in A\} = \{(X \setminus A) \cup \{a\} : a \in A\}.$$

Dan is \mathcal{U} een open overdekking van X , en

$$X \neq ((X \setminus A) \cup \{a_1\}) \cup \cdots \cup ((X \setminus A) \cup \{a_n\})$$

voor elk eindig aantal $a_1, \dots, a_n \in A$. We concluderen dat \mathcal{U} geen eindige deeloverdekking heeft.

§6.2:4 (a) Een metrische ruimte is Hausdorff, dus een compacte verzameling is gesloten. Zij A een compacte deelverzameling van de metrische ruimte (X, d) . Als $A = \emptyset$, dan valt er niets te bewijzen. We mogen dus aannemen dat $A \neq \emptyset$, zeg $x \in A$. Voor elke $y \in A$ zie de open bol $U_y = B(x, d(x, y) + 1)$. De open overdekking $\{U_y : y \in A\}$ heeft een eindige deeloverdekking, want A is compact. Kies dus $y_1, \dots, y_n \in A$ met $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Laat $t = \max\{d(x, y_i) : i \leq n\}$. Als $a, b \in A$, zeg $a \in U_{y_i}$ en $b \in U_{y_j}$, dan geldt

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < d(x, y_i) + 1 + d(x, y_j) + 1 \leq 2t + 2.$$

Dus A is begrensd.

(b) $(0, 1)$.

§6.3:3 We bewijzen een algemener statement dat zowel (a) als (b) tot gevolg heeft.

Theorem 0.1. *Zij X een Lindelöfruimte. Dan heeft elke overaftelbare deelverzameling van X een limietpunt.*

Bewijs. Zij $A \subseteq X$ overaftelbaar. Stel dat A geen limietpunt heeft. Dan bestaat er voor elke $x \in X$ een open omgeving U_x met $U_x \cap A \subseteq \{x\}$. De open overdekking $\{U_x : x \in X\}$ heeft een aftelbare deeloverdekking. Er is dus een aftelbare verzameling E in X met $X = \bigcup_{x \in E} U_x$. Maar dan geldt dat

$$A = A \cap X = \bigcup_{x \in E} (U_x \cap A) \subseteq E$$

aftelbaar is. Tegenspraak. □

Hieruit volgt dus dat elke separabel metrische ruimte deze eigenschap heeft (Stelling 4.7(b) en ‘aftelbare basis \Rightarrow Lindelöf’ vanwege Stelling 6.13).

We gebruiken dit nu als opstapje om het volgende te bewijzen:

Theorem 0.2. *Zij $A \subseteq \mathbb{R}$ overaftelbaar. Dan bestaat er een $a \in A$ zodat voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat $(a, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Bewijs. Stel dat dit niet het geval is. Voor elke $n \geq 1$, zij

$$A_n = \{a \in A : (a, a + 1/n) \cap A = \emptyset\}.$$

Dan geldt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dus er bestaat een N zodat A_N overaftelbaar is. Volgens som 3 van deze paragraaf heeft A_N een limietpunt in A (want A heeft een aftelbare basis en is dus Lindelöf), zeg b . Kies $\varepsilon > 0$ zodat $(b, b + \varepsilon) \cap A = \emptyset$. We mogen aannemen dat $\varepsilon < 1/N$. Bezie nu het interval $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Dan bestaat er een element $a \in A_N \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ met $a \neq b$. Het is duidelijk dat $a \in (b - \varepsilon, b)$. Maar dan geldt dat $b \in (a, a + 1/N)$, en dat is een tegenspraak want $a \in A_N$. □

§6.3:12 Zij \mathbb{S} de rechte van Sorgenfrey, en zij \mathcal{U} een open overdekking van X . Voor elke $U \in \mathcal{U}$ zij $V(U)$ het inwendige van U met betrekking tot de euclidische topologie van \mathbb{R} .

Laat $P = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} V(U)$. We voorzien P van de deelruimte topologie van \mathbb{R} . Dan heeft P een aftelbare basis want \mathbb{R} heeft een aftelbare basis. We bewijzen dat $Z = \mathbb{S} \setminus P$ aftelbaar is. Want stel van niet. Zij $x \in \mathbb{R}$ zodat $(x, x+\varepsilon) \cap Z \neq \emptyset$ voor elke $\varepsilon > 0$ (Theorem 0.2). Kies $U \in \mathcal{U}$ met $x \in U$. Er bestaat $\varepsilon > 0$ met $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$. Maar dan geldt $(x, x+\varepsilon) \subseteq V(U)$ en dus geldt $(x, x+\varepsilon) \cap Z = \emptyset$. Tegenspraak.

De open overdekking $\{V(U) : U \in \mathcal{U}\}$ van P heeft een aftelbare deelloverdekking (aftelbare basis!). Dus aftelbaar veel elementen van \mathcal{U} overdekken heel \mathbb{S} behalve punten die tot de aftelbare verzameling Z behoren. Maar die worden ook overdekt door aftelbaar veel elementen van \mathcal{U} .

§6.4:9 Bezie de 1-puntscompactificatie X_∞ van X . Dan is X_∞ Hausdorff (Stelling 6.18(c)). Merk op dat $X \setminus A$ open is in X en dus in X_∞ . Dat wil zeggen, $A \cup \{\infty\}$ is gesloten in X_∞ en dus compact. Het volstaat nu om het bewijs van Stelling 6.5 toe te passen (of Stelling 6.5).

§6.5:5 Zij A een perfecte deelverzameling van X . Dan is A gesloten per definitie. Zij $a \in A$. Dan is a limietpunt van A , en dus kan $\{a\}$ niet relatief open zijn in A . Immers, $\{a\} \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$. Anderzijds, zij B een gesloten verzameling van X zonder geïsoleerde punten. Het volstaat te bewijzen dat elke $b \in B$ limietpunt is van B . Kies $b \in B$ en zij U een willekeurige open omgeving van b . Dan $U \cap B \neq \{b\}$, want b is niet geïsoleerd. M.a.w., $U \cap (B \setminus \{b\}) \neq \emptyset$.

§6.5:6 (a) We bewijzen een algemener resultaat: elke compacte perfecte Hausdorffruimte X is overaftelbaar. Immers, zij $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare deelverzameling van X . Als $X = \{a_1\}$, dan is a_1 geïsoleerd en dat is niet het geval (som 5). Er bestaat dus een element $x_1 \in X \setminus \{a_1\}$. Laat U_1 en V_1 disjuncte open verzamelingen zijn van X met $x_1 \in U_1$ en $a_1 \in V_1$. Dan geldt $a_1 \notin \overline{U_1}$. Merk op dat $U_1 \neq \{a_2\}$, want a_2 is niet geïsoleerd (som 5). Er bestaat dus een punt $x_2 \in U_1 \setminus \{a_2\}$. Precies zoals boven, kunnen we nu een open verzameling U_2 vinden met $x_2 \in U_2$ en $a_2 \notin \overline{U_2}$. We kunnen door U_2 te vervangen door $U_2 \cap U_1$ onderstellen dat $U_2 \subseteq U_1$. Ga zo door. Uiteindelijk hebben we een rij van niet-lege open verzamelingen $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ geconstrueerd zodat

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$$

en $a_n \notin \overline{U_n}$ voor elke n . Uit de compactheid van X volgt dat er een punt p bestaat in $\bigcap_n \overline{U_n}$ (Stelling 6.1). Het is duidelijk dat $p \neq a_n$ voor elke n . Dus $X \neq \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. M.a.w., X is niet aftelbaar.

(b) Dit volgt uit (a) omdat elk niet-gedegenereerd interval een niet-gedegenereerd gesloten interval omvat, en elk niet-gedegenereerd gesloten interval is compact en perfect.

§7.1:8 (a) Zij $(x, y) \in Y = X \times X$ en zij O een open omgeving van (x, y) in Y . Dan bestaan er open verzameling U en V in X met

$$(x, y) \in U \times V \subseteq O.$$

Omdat $x \in U$ en $y \in V$ bestaan er $x', y' \in X$ met $[x, x'] \subseteq U$ en $[y, y'] \subseteq V$. Dus

$$(x, y) \in [x, x'] \times [y, y'] \subseteq O,$$

hetgeen is zoals gewenst.

(b) Uit (a) volgt dat elke niet-lege open verzameling van Y een product van twee niet-gedegeneerde intervallen omvat. Dat betekent dat $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ een aftelbare dichte deelverzameling is van Y .

(c) Zij L de lijn $y = -x + 1$. Als $(x, y) \in L$, dan geldt

$$([x, x+1] \times [y, y+1]) \cap L = \{(x, y)\}$$

(teken een plaatje). Dus elk punt van L is geïsoleerd. Maar dan is L niet separabel, want L is overaftelbaar.

(d) Het is duidelijk dat L gesloten is in Y . Maar dan heeft Y een gesloten deelruimte die niet Lindelöf is, en is dus zelf niet Lindelöf. Dat X Lindelöf is werd bewezen in §6.3:12.

§7.1:11 Zij X een topologische ruimte, en zij $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.

Onderstel dat X Hausdorff is. We bewijzen dat $Y = (X \times X) \setminus \Delta$ open is. Kies daartoe een willekeurig punt $(x, y) \in Y$. Dan geldt $x \neq y$, en dus bestaan er disjuncte open verzamelingen U en V in X met $x \in U$ en $y \in V$. Dan geldt $(x, y) \in U \times V \subseteq Y$, hetgeen is zoals gewenst.

Onderstel nu, met dezelfde notatie als boven, dat Y open is in $X \times X$. Kies verschillende punten x en y in X . Dan geldt $(x, y) \in Y$, en omdat Y open is in $X \times X$, bestaan er open verzamelingen U en V in X met $(x, y) \in U \times V \subseteq Y$. Dan geldt $x \in U$, $y \in V$ en $U \cap V = \emptyset$, hetgeen weer is zoals gewenst.

§7.2:1 (a) Kies $x \in X$, en voor elke i zij \mathcal{U}_i een aftelbare omgevingsbasis voor x_i in X_i . De collectie

$$\left\{ \prod_{i=1}^{\infty} V_i : (\exists N \in \mathbb{N})(\forall i \leq N)(V_i \in \mathcal{U}_i) \ \& \ (\forall i > N)(V_i = X_i) \right\}$$

is een aftelbare omgevingsbasis van x in X . (Gebruik dat een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen weer aftelbaar is.)

(b) Voor elke i zij \mathcal{B}_i een aftelbare basis voor X_i . De collectie

$$\left\{ \prod_{i=1}^{\infty} V_i : (\exists N \in \mathbb{N})(\forall i \leq N)(V_i \in \mathcal{B}_i) \ \& \ (\forall i > N)(V_i = X_i) \right\}$$

is een aftelbare basis voor X .

(c) Als er een i is met $X_i = \emptyset$, dan is $X = \emptyset$ en dus zeker separabel. We mogen dus

veronderstellen dat $X_i \neq \emptyset$ voor elke i , zeg $c_i \in X_i$. Voor elke i zij D_i een aftelbare dichte deelverzameling van X_i . De verzameling

$$\{x \in X : (\exists N \in \mathbb{N})(\forall i \leq N)(x_i \in D_i) \& (\forall i > N)(x_i = c_i)\}$$

is een aftelbare dichte deelverzameling van X .

§7.2:10 (a) Triviaal.

(b) Stel dat voor elke i de ruimte X_i de punten a_i en b_i bevat waarbij $a_i \neq b_i$. Stel dat $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ een geïsoleerd punt heeft, zeg x . Dan is $\{x\}$ open, en dus bevat $\{x\}$ een niet-lege open verzameling uit de standaardbasis, dus $\{x\}$ is een element uit de standaardbasis. Kies $N \in \mathbb{N}$ zodat er open verzamelingen U_i bestaan in X_i voor elke $i \leq N$ met

$$\{x\} = \prod_{i=1}^N U_i \times \prod_{i=N+1}^{\infty} X_i.$$

Maar dan bevat $\{x\}$ de twee verschillen punten

$$(x_1, \dots, x_N, a_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots), \quad (x_1, \dots, x_N, b_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots),$$

tegenspraak.

§7.3:4 (a) $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(b) De euclidische topologie. De identiteit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ laat zien dat alle euclidisch open verzamelingen open zijn in de zwakke topologie. Maar niet meer dan dat omdat alle beschouwde functies continue zijn m.b.t. de euclidische topologie.

(c) De euclidische topologie.

(d) De euclidische topologie. Bezie een open interval (a, b) . De functie

$$f(x) = \begin{cases} x & (a-1 < x < a+1), \\ a-1 & (x \leq a-1), \\ a+1 & (a+1 \leq x). \end{cases}$$

laat zien dat (a, b) open is in de zwakke topologie. Dus de zwakke topologie omvat de euclidische topologie. Maar niet meer dan dat omdat alle beschouwde functies continue zijn m.b.t. de euclidische topologie.

§7.4:11 Zij $f: X \rightarrow Y$ een quotiënt afbeelding met Y samenhangend en $f^{-1}(y)$ samenhangend voor elke $y \in Y$. Stel dat X niet samenhangend is, zeg X kan worden geschreven als $U \cup V$, waarbij U en V niet-lege open en disjuncte verzamelingen zijn. Als $y \in Y$, dan kan vanwege samenhang $f^{-1}(y)$ niet zowel U als V snijden. Laat

$$A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\}, \quad B = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq V\}.$$

Omdat f surjectief is, geldt $f^{-1}(A) = U$ en $f^{-1}(B) = V$. Maar dat betekent dat A en B niet-lege open verzamelingen zijn van Y , want f is quotiënt. Omdat $A \cap B = \emptyset$, is dit strijdig met de samenhang van Y .

§7.4:12 (a) Triviaal, want het continue beeld van een samenhangende ruimte is samenhangend.

b) Triviaal, want het continue beeld van een compacte ruimte is compact.

c) Triviaal, want het continue beeld van een Lindelöfruimte is Lindelöf.

d) Zij $f: X \rightarrow Y$ quotiënt, met X lokaal samenhangend. Laat O een open omgeving zijn van een punt y in Y , en laat $C(y)$ de component zijn van y in O . We zullen laten zien dat $C(y)$ open is en daarvoor volstaat het te bewijzen dat $C := f^{-1}(C(y))$ open is (immers, f is quotiënt).

Laat x een willekeurig punt zijn in C . Deze x heeft een open samenhangende omgeving U_x met $U_x \subseteq f^{-1}(O)$.

Dus is $f(U_x)$ samenhangend en snijdt $C(y)$ in $f(x)$. Dus $C(y) \cup f(U_x)$ is een samenhangende deelverzameling van O . Maar $C(y)$ is een component van O , dus maximaal samenhangend waaruit volgt dat $f(U_x) \subseteq C(y)$. Maar dit betekent dat $U_x \subseteq f^{-1}(C(y)) = C$ en dus is x een inwendig punt van C .

Dus alle punten van C zijn inwendige punten, m.a.w., C is open. Dus $C(y)$ is open, en we zijn nu in de positie om Stelling 5.16 te gebruiken.

§8.1:3 (a) We laten zien dat $S = X \setminus \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ open is. Kies daartoe een willekeurig element p van S . Dan geldt $f(p) \neq g(p)$ en omdat Y T_2 is bestaan er open omgevingen U en V van $f(p)$ respectievelijk $g(p)$ met $U \cap V = \emptyset$. Zij $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. Dan is W een open omgeving van p want f en g zijn continu. Het is duidelijk dat $f(W) \cap g(W) = \emptyset$, m.a.w., $W \subseteq S$. Maar dan is S omgeving van elk van haar punten, en bijgevolg open.

(b) Zij D een dichte verzameling van X met $f(d) = g(d)$ voor elke $d \in D$. De verzameling $T = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ is gesloten volgens (a) en omvat de dichte deelverzameling D . Dus $T = X$.

§8.1:6 (a) Zie Stelling 4.8 op pag. 112. Het is duidelijk dat $\bigcup \mathcal{B} = X$ (Is dat eigenlijk wel zo? Wat als X maar uit één punt bestaat?). Laat B_1 en B_2 willekeurige elementen zijn van \mathcal{B} . We onderscheiden verschillende gevallen. Stel bijvoorbeeld dat $B_1 = (\leftarrow, u)$ en $B_2 = (v, \rightarrow)$, en kies $x \in B_1 \cap B_2$. Dan geldt $x \in B_3 = (v, u) \subseteq B_1 \cap B_2$ en $B_3 \in \mathcal{B}$. De andere gevallen volgen door een identieke redenering.

(b) Laat x en y verschillende punten zijn van X . We mogen onderstellen dat $x < y$. Als er een z bestaat met $x < z < y$ dan zijn (\leftarrow, z) en (z, \rightarrow) disjuncte open omgevingen van x respectievelijk y . Als zo'n z niet bestaat, dan zijn (\leftarrow, y) en (x, \rightarrow) de gewenste omgevingen.

(c) Precies zoals bij \mathbb{R} .

§8.2:1 (a) Zij X een reguliere ruimte met deelruimte Y . Een deelruimte van een T_1 -ruimte is T_1 (waarom?). Kies nu willekeurige p en A waarbij $p \in Y$ en A relatief gesloten in Y zodat $p \notin A$. Er is een gesloten deelverzameling B van X met $B \cap Y = A$. Dan $p \notin B$, en dus bestaan er omdat X regulier is disjuncte open verzamelingen U en V in X met $p \in U$ en $B \subseteq V$. Dan zijn $U' = U \cap Y$ en $V' = V \cap Y$ disjuncte relatief open verzamelingen van Y met $p \in U'$ en $A \subseteq V'$. Dat regulariteit een topologische eigenschap is standaard.

§8.2:3 Een T_2 -ruimte is T_1 . Pas nu Stelling 6.5 toe.

§8.3:4 (a) Zij A een gesloten deelruimte van een Lindelöfruimte X , en zij \mathcal{U} een overdekking van A met relatief open verzamelingen. Voor elke $U \in \mathcal{U}$ zij $V(U)$ een open verzameling van X met $V(U) \cap A = U$. Dan is

$$\mathcal{V} = \{V(U) : U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus A\}$$

een open overdekking van X , en heeft dus een aftelbare deelooverdekking want X is Lindelöf, zeg

$$\{V(U_1), V(U_2), \dots\} \cup \{X \setminus A\}.$$

Dan is $\{U_1, U_2, \dots\}$ een aftelbare deelcollectie van \mathcal{U} die A overdekt.

(b) Zij A een overaftelbare deelverzameling van een Lindelöfruimte X . Stel dat A geen limietpunt heeft. Dan bestaat er voor elke $x \in X$ een open omgeving U_x met

$$U_x \cap A \subseteq \{x\}.$$

Dan is $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ een open overdekking van X , met een aftelbare deelooverdekking, zeg $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots\}$. Maar dan geldt

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap U_{x_i}) \subseteq \{x_1, x_2, \dots\},$$

hetgeen een tegenspraak is want A is overaftelbaar.

§8.4:5 (a) Zij Y een deelruimte van een volledig reguliere ruimte. Zij $y \in Y$ en $A \subseteq Y$ relatief gesloten met $y \notin A$. Er is een gesloten verzameling B in X met $B \cap Y = A$. Dan $y \notin B$, dus bestaat er een continue functie $f: X \rightarrow \mathbb{I}$, met $f(y) = 0$ en $f(B) \subseteq \{1\}$. Bezie nu de restrictie van f tot Y .

(b) (Voor eindige producten.) Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$, met elke X_i volledig regulier. Zij $x \in X$ en $A \subseteq X$ gesloten met $x \notin A$. Er bestaan open verzameling U_i van X_i met $x \in \prod_{i=1}^n U_i \subseteq X \setminus A$. Kies een continue functie $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{I}$ met $f_i(x_i) = 0$ en $f_i(X_i \setminus U_i) \subseteq \{1\}$. Definieer nu $g: X \rightarrow \mathbb{I}$ door $g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f_i(x_i)$. Het is gemakkelijk in te zien dat $g(x) = 0$ and $g(a) \geq \frac{1}{n}$ voor elke $a \in A$. Immers, als $a \in A$ dan bestaat er een $i \leq n$ met $a_i \notin U_i$. Dan geldt $f_i(a_i) = 1$, en dus $f(a) \geq \frac{1}{n}$. M.a.w., f scheidt x en A .

§8.4:10 Zij X normaal, $A \subseteq X$ gesloten en $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continu. Voor elke $i \leq n$, zij $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de projectie. De functie $\pi_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ can worden uitgebreid tot een continue functie $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ (Stelling 8.14). Definieer nu $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ door

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

Dan is g continu (Stelling 7.8), en een uitbreiding van f .

§8.4:11 Merk op dat als (X, d) een metrische ruimte is, dan is voor elke niet-lege verzameling A van X de functie $x \mapsto d(x, A)$ continu (zie §3.4:6). De continuïteit van f is dus duidelijk, als je bedenkt dat de noemer van de breuk

$$\frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

ongelijk aan 0 is, voor elke $x \in X$. Verder triviaal.