

---

**Tentamen (voortentamen)**  
**Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen**  
**voor studenten Wiskunde en Natuurkunde**

Afdeling Wiskunde  
Faculteit der Exacte Wetenschappen  
Vrije Universiteit Amsterdam

Datum: dinsdag 21 oktober 2003, 13:30–15:30 (2 uur)

Beantwoordingsinstructie: 4 opgaven; *alle antwoorden beargumenteren.*

Geen rekenmachine, geen open boek, wel formuleblad.

---

1. Beschouw de warmtevergelijking

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in [0, 1],$$

met beginwaarde  $u(0, x) = f(x) \in C^0([0, 1])$  en randvoorwaarden  $u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0$ .

- (a) Geef de algemene oplossing m.b.v. scheiden van variabelen.
- (b) Geef de formules voor de Fouriercoëfficiënten in termen van de beginfunctie  $f$ .
- (c) Zij  $f(x) = x$  op  $[0, 1]$ . Bereken de oplossing van de warmtevergelijking.
- (d) Bewijs dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{1}{2}$  voor alle  $x \in [0, 1]$ .

2. Laat zien dat de oplossing in 1(c)  $C^\infty([0, 1])$  is voor  $t > 0$ .

3. (a) Los de vergelijking

$$(1 + x^2)u_x + u_y = 0$$

op.

- (b) Vind de oplossing die voldoet aan de randvoorwaarde  $u(0, y) = y^2$ .

4. Beschouw de functie  $f(x) = x^2$  op  $[0, 1]$ .

- (a) Bereken de cosinus-Fourier reeks van  $x^2$ .
- (b) Converteert de Fourierreeks uniform naar  $x^2$  op  $[0, 1]$ ? (toelichting!)
- (c) Gebruik de Parseval identiteit om  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  uit te rekenen.

*Succes*